Corrigé du D.S. n° 3 de mathématiques

Exercice (tiré de E3A 2017 PC Math 2)

1) L'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car la fonction nulle est continue et bornée et car toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. En effet : si $\exists (M,N) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} |f(x)| \leq M \\ |g(x)| \leq N \end{cases}$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ |\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq |\alpha||f(x)| + |\beta||g(x)| \leq |\alpha|M + |\beta|N$.

2) Si une fonction f appartient à E, alors elle est bornée, d'où $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leq M$.
D'où $|\mathrm{e}^{-t} f(x+t)| \leq M\mathrm{e}^{-t}$ pour tout $t \geq 0$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} M\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente, d'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\mathrm{e}^{-t} f(x+t)|\,dt$ converge aussi.
Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\,dt \text{ est absolument convergente.}}$

3) D'après l'inégalité triangulaire,

$$|\Phi(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\,dt\right| \leq \int_0^{\infty} |\mathrm{e}^{-t} f(x+t)|\,dt \leq \int_0^{\infty} M\mathrm{e}^{-t}\,dt = M$$

pour tout réel x. Donc $\boxed{\text{la fonction } \Phi(f) \text{ est bornée.}}$

4) On effectue le changement de variable $u = x+t$. La fonction $t \mapsto x+t$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante, d'où : $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-(u-x)} f(u)\,du = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du$.

5) Soit $\varepsilon > 0$. Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors il existe $X \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \geq X,\ |f(x)| \leq \varepsilon$. D'où :
$\forall x \geq X,\ |\Phi(f)(x)| = \left|\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du\right| \leq \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} |\mathrm{e}^{-u} f(u)|\,du$ d'après l'inégalité triangulaire. D'où $|\Phi(f)(x)| \leq \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\varepsilon\,du \leq \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}\varepsilon$. On a montré que : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} \Phi(f)(x) = 0}$.

6) On déduit de la question (4) que

$$\Phi(f)(x) = \mathrm{e}^x \cdot \left(\int_7^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du - \int_7^{x} \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du\right) = \mathrm{e}^x \cdot \left(\lim_{+\infty} G - G(x)\right),$$

en notant $G : x \mapsto \displaystyle\int_7^x \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du$ une primitive de la fonction continue $u \mapsto \mathrm{e}^{-u} f(u)$. Par suite, la fonction $\Phi(f)$ est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)'(x) = \mathrm{e}^x \left(\lim_{+\infty} G - G(x)\right) + \mathrm{e}^x\,(0 - G'(x)) = \Phi(f)(x) - f(x)$$

car $G'(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$. Donc $\boxed{\Phi(f)' = \Phi(f) - f.}$

7) D'une part, l'application Φ est linéaire ; d'autre part, $\Phi(f)$ appartient à E pour tout $f \in E$. En effet, $\Phi(f)$ est continue car dérivable d'après (6). Et $\Phi(f)$ est bornée d'après (3).
Donc $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

8) Analyse : Soit $f \in E$. Si la fonction $\Phi(f)$ est nulle, alors elle est constante et sa dérivée $\Phi(f)'$ est donc nulle. Or $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$ d'après (4). Donc $f = 0$.
Synthèse : Si $f = 0$, alors $\Phi(f) = 0$.
Conclusion : $\Phi(f) = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

9) De la question précédente, il résulte que $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_E\}$. D'où l'application linéaire $\boxed{\Phi \text{ est injective}}$. Mais $\boxed{\Phi \text{ n'est pas surjective}}$ car la fonction

$$x \mapsto x \text{ si } x \in [0,1],\ 2-x \text{ si } x \in [1,2],\ 0 \text{ sinon}$$

est continue et bornée, et appartient donc à E. Mais n'est pas dérivable et n'appartient donc pas $\operatorname{Im}\Phi$ d'après la question (6).

10) Analyse : Soit $f \in E$. Si la fonction $\Phi(f) = f$, alors $\Phi(f)' = f'$. Or $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$ d'après (4). D'où $f' = 0$. Donc la fonction f est constante

Synthèse : Si f est constante, alors $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = K$. D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} K\mathrm{e}^{-t}\,dt = K$. Donc $\Phi(f) = f$.

Conclusion : $\Phi(f) = f$ si, et seulement si, la fonction f est constante.

11) Rappelons qu'un réel λ est une valeur propre de Φ si, et seulement si, il existe $f \in E$ tel que $f \neq 0$ et $\Phi(f) = \lambda f$. Des deux questions précédentes, il résulte que 0 n'est pas une valeur propre et que 1 en est une. Soit maintenant un réel $\lambda \notin \{0;1\}$. Si $\Phi(f) = \lambda f$, alors $\Phi(f)' = \lambda f'$ et, d'après (4), $\lambda f' = (\lambda-1)f$, d'où $f' = \dfrac{\lambda-1}{\lambda} f$ car $\lambda \neq 0$. On résout cette équation différentielle : $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = K\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}$. Or $\lambda \neq 1$, donc : ou bien $K = 0$ (et alors $f = 0$), ou bien f n'est pas bornée (et alors $f \notin E$). Dans les deux cas, λ n'est pas une valeur propre. Donc $\boxed{\operatorname{Sp}(\Phi) = \{1\}}$.

12) L'intégrale $K_i = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est impropre en $+\infty$. Elle est convergente car la fonction $t \mapsto t^i\mathrm{e}^{-t}$ est continue et $t^i\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe au voisinage de $+\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$.

On montre par récurrence sur i que $K_i = i!$:

- $K_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.
- Supposons que $K_i = i!$ pour un entier $i \in \mathbb{N}$ et intégrons par partie : $K_{i+1} = \int_0^{+\infty} uv'$ et les fonctions $u : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ et $v : t \mapsto t^{i+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, d'où $K_{i+1} = [-t^{i+1}\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty}(i+1)t^i\mathrm{e}^{-t}\,dt = (i+1)K_i$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{i+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ par croissances comparées.
  D'où $K_{i+1} = (i+1)\cdot i! = (i+1)!$.
- Donc $\boxed{K_i = i! \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}}$.

13) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}$: pour tout $t \in [0,+\infty[$, $(x+t)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} t^{j-i}x^i$.

L'intégrale $L_j(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)^j\,dt$ est convergente car c'est la combinaison linéaire $L_j(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} x^i K_{j-i}$ des $j+1$ intégrales convergentes K_i. Or $K_{j-i} = (j-i)!$ et $\dbinom{j}{i} = \dfrac{j!}{i!(j-i)!}$. Donc $\boxed{L_j(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\frac{j!}{i!}x^i}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, d'où $\varphi(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}P(x+t)\,dt$ est une intégrale convergente car c'est la combinaison linéaire $\varphi(P)(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j L_j(x)$ des $n+1$ intégrales convergentes $L_j(x)$. De plus, $\varphi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n car c'est la combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j L_j$ des polynômes L_j de degrés $j \leq n$. Enfin, φ est une application linéaire car $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)$ pour tous $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ par linéarité de l'intégrale. Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$ et sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure :

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \cdots & \varphi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & & n! \\ 0 & 1 & 2 & & n! \\ 0 & 0 & 1 & & n!/2 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = (m_{ij})_{0\leq i,j \leq n}\,, \quad \text{où } m_{ij} = \frac{j!}{i!} \text{ si } i \leq j \text{ et est nul sinon}$$

car $L_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!} X^i$.

14) Le déterminant de la matrice triangulaire M vaut 1, il est donc non nul. On en déduit que la matrice M est inversible.

Problème (extrait de EPITA - PSI - 2017)

Partie A

1) $\sin t \underset{0}{\sim} t$, donc $\boxed{\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}}$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0,\pi]$, et l'intégrale de Riemann $\int_0^\pi \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si, et seulement si, $\alpha - 1 < 1$, donc, par équivalence des fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale } I(\alpha) \text{ converge si, et seulement si } \alpha < 2}$.

2) **a)** Soit $\alpha > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$ et, pour tout $t \geq \pi$, $\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$.
Comme l'intégrale de Riemann $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge, par comparaison des fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale } J(\alpha) \text{ est absolument convergente si } \alpha > 1}$.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t+\pi)| = |-\sin t| = |\sin t|$, ce qui signifie que $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto |\sin t| \text{ est } \pi\text{-périodique}}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $u \mapsto t = u + k\pi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ vers $[k\pi,(k+1)\pi]$ et $dt = du$.
Le théorème de changement de variable donne :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt \leq \int_0^\pi |\sin(u+k\pi)|\underset{.}{u} = \int_0^\pi \sin u\,du = [-\cos u]_0^\pi = 1-(-1) = 2$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt = 2}$.

c) Soit $\alpha \geq 0$ et $k \geq 1$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[k\pi,(k+1)\pi]$, pour tout $t \in [k\pi,(k+1)\pi]$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha\pi^\alpha}$, et donc $\frac{|\sin t|}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{t^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{k^\alpha\pi^\alpha}$.
Par croissance de l'intégrale, $\frac{1}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{1}{k^\alpha\pi^\alpha}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt$,
Comme $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt = 2$, on obtient : $\boxed{\frac{2}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{2}{k^\alpha\pi^\alpha}}$.

d) On somme pour $k = 1$ à $n-1$ et on obtient :
$\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}$, c'est-à-dire $\boxed{\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}}$.

— Si $\alpha \leq 1$, alors la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. La minoration précédente donne $\int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui prouve la divergence de l'intégrale $J(\alpha)$.

— Si $\alpha > 1$, alors l'intégrale $J(\alpha)$ converge absolument d'après la question 2a.

En conclusion, $\boxed{\text{l'intégrale } J(\alpha) \text{ est absolument convergente si, et seulement si, } \alpha > 1}$.

3) **a)** Pour tout $x \geq \pi$, $\int_\pi^x \sin(t)\,dt = [-\cos t]_\pi^x = -\cos x - 1$ et cette quantité n'a pas de limite lorsque $x \to +\infty$. Donc $\boxed{\text{l'intégrale } J(0) \text{ est divergente}}$.

b) Soit $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq \pi$, $\left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable, d'après Riemann, sur $[\pi, +\infty[$.
Donc, par comparaison des fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt \text{ est absolument convergente}}$.

Soit $x \geq \pi$. On procède à une intégration par parties en posant $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\pi, x]$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$.
Pour tout $t \geq \pi$, $|u(t)v(t)| = \left|\frac{\cos t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt$ converge.

Le théorème d'intégration par parties assure alors $\boxed{\text{la convergence de l'intégrale } J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt}$.

4) L'intégrale $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, les intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent, c'est-à-dire si, et seulement si $\alpha < 2$ et $\alpha > 0$, i.e $\alpha \in]0, 2[$. Donc $\boxed{\text{le domaine de définition de la fonction } f \text{ est }]0,2[}$.
L'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge absolument si, et seulement si, les intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent absolument. Comme la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est positive sur $]0, \pi]$, l'intégrale $I(\alpha)$ est absolument convergente si, et seulement si, elle est convergente. Donc l'intégrale $f(\alpha)$ est absolument convergente si, et seulement si $\alpha < 2$ et $\alpha > 1$. $\boxed{\text{Le domaine de convergence absolue de l'intégrale définissant } f(\alpha) \text{ est }]1,2[}$.

Partie B

5) **a)** On fait une intégration par parties en posant $u(t) = 1 - \cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$.
Comme $u(t)v(t) = \frac{1-\cos t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{t^{2-\alpha}}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, puisque $2 - \alpha > 0$, et que $K(\alpha)$ est une intégrale convergente d'après la partie I, on peut intégrer par parties :

$$K(\alpha) = \left[\frac{1-\cos t}{t^\alpha}\right]_0^{\pi/2} + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt = \frac{1-0}{(\pi/2)^\alpha} - 0 + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

Donc $\boxed{K(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt}$.

b)
- La fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0, \pi/2]$ donc $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt \geq 0$.
- $\alpha + 1 \leq 2$ donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{t^2}$.
  Comme, pour tout $t \in]0,1]$, $1 - \cos t \geq 0$, $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$, par croissance de l'intégrale.
- $\alpha + 1 \geq 0$ donc, pour tout $t \in [1, \pi/2]$, $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \leq 1$.
  Comme, pour tout $t \in [1, \pi/2]$, $1 - \cos t \geq 0$, $\int_1^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt \leqslant \int_1^{\pi/2} (1 - \cos t)\, dt$, par croissance de l'intégrale.

D'autre part, la relation de Chasles donne $K(\alpha) = \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} t + \int_1^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt + \int_1^{\pi/2} (1 - \cos(t))\, dt}$$

c) Notons M le majorant (indépendant de α) de l'encadrement précédent. Alors :

$$\forall \alpha \in]0, 1], \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha \leq K(\alpha) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha M$$

Comme $\left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(2/\pi)} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$ et $\alpha M \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure : $\boxed{\lim_{\alpha\to 0} K(\alpha) = 1}$.

6) **a)** On pose $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$. Comme u est bornée et $v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui rend légitime une première intégration par parties :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = 0 - 0 - \alpha \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt = -\alpha \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

On pose à nouveau $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ avec $x'(t) = \cos t$ et $y'(t) = -\frac{\alpha+1}{t^{\alpha+2}}$. Comme x est bornée et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $x(t)y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui légitime une seconde intégration par parties :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = -\alpha \left(0 - \frac{1}{(\pi/2)^{\alpha+1}} + (\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt \right)$$

On a obtenu : $\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt}$.

b) — L'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale donnent :

$$\left| \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt \right| \leq \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\alpha+2}},\, dt \leq \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+2}}$$

et le dernier membre est égal à $\alpha(\alpha+1) \left[-\frac{1}{(\alpha+1)t^{\alpha+1}} \right]_{\pi/2}^{+\infty} = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}}$ Comme $\frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, on conclut, patr le théorème des gendarmes, que $\boxed{\alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0}$.

— D'après la question précédente, comme $\frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, on conclut que $\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0}$.

c) Par opérations, $\boxed{f(\alpha) \text{ admet une limite finie quand } \alpha \to 0 \text{ égale à } 1 + 0 = 1}$.

Partie C

7) **a)** Soit $\alpha \in]0, 2[$. La fonction $h : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ et :

— $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^{\alpha+1}} = \frac{1}{2t^{\alpha-1}}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ d'après Riemann, puisque $\alpha - 1 < 1$.

— Pour tout $t \geq 1$, $h(t) \leq \frac{2}{t^{\alpha+1}}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après Riemann, puisque $\alpha+1 > 1$.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \text{ converge si } 0 < \alpha < 2}$.

b) Les fonctions $u : t \mapsto 1 - \cos t$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec $u' : t \mapsto \sin t$ et $v' : t \mapsto -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ et :

— $u(t)v(t) = \frac{1-\cos t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^\alpha} = \frac{t^{2-\alpha}}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, puisque $2 - \alpha > 0$.

— $t \mapsto 1 - \cos t$ est bornée, donc $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(\frac{1}{t^\alpha}) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puisque $\alpha > 0$.

Comme l'intégrale $f(\alpha)$ converge et que le produit uv admet des limites finies aux bornes de $]0, +\infty[$, on peut intégrer par parties :

$$f(\alpha) = 0 - 0 + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

On a obtenu : $\boxed{\text{pour } 0 < \alpha < 2,\ f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt}$.

c) Comme la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0, +\infty[$ et $\alpha > 0$, par positivite de l'intégrale, f est positive sur $]0, 2[$. Si f s'annulait en $\alpha \in]0, 2[$, alors la fonction continue et positive $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ serait d'intégrale nulle, donc identiquement nulle sur $]0, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\boxed{f \text{ est à valeurs strictement positives sur }]0, 2[}$.

8) **a)** La fonction φ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\text{elle est prolongeable en une fonction continue sur } \mathbb{R}}$, en posant $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.

b) Pour tout $t \in]0, \pi]$, $\cos t < 1$, donc φ est strictement positive sur $]0, \pi]$ et, $\varphi(0) = \frac{1}{2} > 0$.
Par conséquent φ est strictement positive sur $[0, \pi]$.
Etant continue sur le segment $[0, \pi]$, la fonction φ est bornée et atteint ses bornes sur $[0, \pi]$, donc $\boxed{\varphi \text{ admet sur } [0, \pi] \text{ un minimum } \mu > 0}$ car la fonction φ est strictement positive.

c) Comme $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0,+\infty[$, d'après la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale :

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \geq \alpha \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt = \alpha \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha-1}}\, dt \geqslant \alpha\mu \left[\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^{\pi} = \alpha\mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

On a obtenu, pour $0 < \alpha < 2$, $\boxed{f(\alpha) \geqslant \alpha \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \geqslant \alpha\mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}}$.

d) $\alpha\mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha} = \alpha\mu \frac{\mathrm{e}^{(2-\alpha)\ln\pi}}{2-\alpha} \underset{\alpha\to 2^-}{\sim} \frac{2\mu}{2-\alpha} \underset{\alpha\to 2^-}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par minoration, $\boxed{f(\alpha) \underset{\alpha\to 2^-}{\longrightarrow} +\infty}$.