D.S. n° 3 de mathématiques

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient un exercice et un problème.
Les calculatrices sont interdites.

On attachera un grand soin à la rédaction.
En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

25

Exercice

1,5 1. Justifier que l'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

1 2. Soit une fonction $f \in E$. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale
$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\, dt$$
est absolument convergente.

1 3. Soit une fonction $f \in E$. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est bornée.

1 4. Soit une fonction $f \in E$. Justifier que, tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(f)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u} f(u)\, du$.

1,5 5. Est-il vrai que, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(f)(x) = 0$?

2 6. Soit une fonction $f \in E$. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée $\Phi(f)'$ est égale à $\Phi(f) - f$.

1,5 7. Justifier que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E.

2 8. Déterminer toutes les fonctions $f \in E$ telles que $\Phi(f) = 0$.

3 9. L'endomorphisme Φ est-il injectif ? surjectif ?

2 10. Déterminer toutes les fonctions $f \in E$ telles que $\Phi(f) = f$.

3 11. Déterminer le spectre de Φ.

2 12. Prouver que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'intégrale $K_i = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i e^{-t}\, dt$ est convergente et la calculer.

3 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt$ définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice $M = (m_{ij})$ de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

0,5 14. Cette matrice M est-elle inversible ?

Problème

Notations et objectifs

- *Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel* **positif***, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsqu'elle est convergente :*

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$$

- *On se propose de prouver dans la partie A l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f.*
- *Puis on étudie dans les parties B et C le comportement de f aux voisinages de 0 et de 2.*

10

Partie A — Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt \qquad \textit{et} \qquad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$$

2 1. **Etude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$.**
Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

2. **Etude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$.**

1 (a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente si $\alpha > 1$.

1 (b) Déterminer, pour tout entier naturel k, la valeur de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\, dt$.

1 (c) Démontrer l'encadrement suivant, pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\, dt \leqslant \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

dv si $\alpha \leq 1$ 1,5

2 (d) Préciser pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente. cv si $\alpha > 1$ 0,5

3. **Etude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$.**

0,5 (a) L'intégrale $J(0)$ est-elle convergente ?

IPP 1

2 (b) Prouver la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ si $\alpha > 0$. cv abs. de $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ 1

0,5 4. **Domaine de définition de la fonction f.**
En déduire le domaine de définition de la fonction f ainsi que le domaine de convergence absolue de l'intégrale définissant $f(\alpha)$.
l'intégral $f(\alpha)$ cv ssi les intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

10

Partie B — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

On se propose, dans cette partie, d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0, et on écrit, à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$$

5. **On pose $K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$, pour $\alpha \in]0,1]$.**

   2 (a) Montrer que :

   $$K(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

   1 $\frac{1-\cos t}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ car $2-\alpha>0$

   1 IPP

   1,5 (b) Montrer que :

   $$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt + \int_1^{\pi/2} (1-\cos(t))\,dt$$

   0,5 0,5 0,5

   2 (c) En déduire la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. $\left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 1$ car... 1 $\quad \cdots \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$ car ... 1

6. **Limite de l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$.**

   2 (a) Justifier l'égalité suivante :

   $$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$$

   1 bornée × (→ 0) tend vers 0

   1 IPP ?

   2 (b) Déterminer la limite de $\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$, puis de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ quand α tend vers 0.

   0,5 (c) En déduire la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

10

Partie C — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7. **Une autre expression de la fonction f.**

   2,5 (a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0<\alpha<2$:

   $$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

   $\int_0^{+\infty}$ cv ssi $\int_0^{\pi/2}$ et $\int_{\pi/2}^{+\infty}$ cv. 0,5

   $\int_0^{\pi/2}$ cv car ... 1

   $\int_{\pi/2}^{+\infty}$ cv car ... 1

   2 (b) Etablir que, si $0<\alpha<2$:

   $$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

   $\frac{1-\cos t}{t^2} \to 0$ $(t\to 0)$ 0,5 et $(t\to+\infty)$ 0,5

   IPP 1

   1 (c) En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0,2[$.

8. **Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2.**
   On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$.

   0,5 (a) Montrer que φ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On notera encore φ son prolongement.

   2 (b) Montrer que la fonction φ admet sur $[0,\pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter). 1,5 C° sur segment, donc bornée et atteint ses bornes

   0,5 $\mu>0$

   1 (c) Etablir les inégalités suivantes, pour $0<\alpha<2$:

   $$f(\alpha) \geqslant \alpha \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \geqslant \alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

   0,5 0,5

   1 (d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.