D.S. n° 3 de mathématiques

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème.
Les calculatrices sont interdites.

On attachera un grand soin à la rédaction.
En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

— Exercice 1 —

On étudie la fonction $F\ :]-\infty,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ appelée le **dilogarithme**.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ est convergente.

2) On note $\lambda=-\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$. Montrer que $\lambda=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$.

3) Pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-kx}\,dx$ converge et la calculer.

4) En déduire que, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\int_0^{+\infty}x\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$.

5) Montrer que, pour tout réel $x\geq 0$, $x\leq\mathrm{e}^x-1$.

6) En déduire que, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq\lambda-\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n}$.

7) Qu'en déduire ?

— Exercice 2 —

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,dt$$

qu'on ne cherchera pas à calculer.

1) Montrer que la fonction f est décroissante.

2) Soit x_0 un réel strictement positif.
Montrer que, pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2 \cdot \mathrm{e} \cdot |x - x_0|}{x_0^2}.$$

Qu'en déduire ?

3) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{\mathrm{e}-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{\mathrm{e}-1}{x}.$$

Qu'en déduire ?

4) Montrer qu'il existe un réel positif M (que l'on déterminera) tel que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathrm{e}^t - 1 \leq M \cdot t.$$

5) Soit g la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{x+t}\,dt.$$

Montrer que la fonction g est bornée.

6) En déduire que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0^+.

— Problème —

Soient T un entier naturel non nul et u une suite complexe.
On dit que u est périodique de période T si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+T} = u_n$.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites complexes T- périodiques.
On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes bornées.

On fixe c la suite constante égale à 1 et w la suite $\left(e^{2in\pi/T}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Montrer que $\mathcal{B}$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel et que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$. Les suites c et w sont-elles des éléments de $\mathcal{P}$?

2) En utilisant l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{C}^T \\ u & \mapsto & (u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}) \end{array}$, déterminer la dimension de $\mathcal{P}$.

$$\text{Pour tous } u \in \mathcal{P} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } A(u,n) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} u_{n+k}.$$

3) La suite u étant fixée, démontrer que le complexe $A(u,n)$ ne dépend pas de l'entier n choisi.
Ce nombre complexe, dépendant uniquement de u, sera désormais noté $M(u)$ et appelé la moyenne de u.

4) Calculer $M(c)$ et $M(w)$.

5) Montrer que l'application $M : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{C} \\ u & \mapsto & M(u) \end{array}$ est une forme linéaire et que son noyau $\operatorname{Ker} M$ est un hyperplan $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$.

6) Démontrer que l'application $\Pi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ u & \mapsto & u - M(u)c \end{array}$ est un projecteur. Sur quel sous-espace vectoriel ? parallèlement à quel sous-espace vectoriel ?

On définit l'endomorphisme $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$ et on appelle $D(u)$ la dérivée de u.

7) Déterminer une base du noyau de D.

8) Montrer que $D(w)$ est une suite géométrique.

9) Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par D et que l'endomorphisme $\hat{D} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ u & \mapsto & D(u) \end{array}$ est bien défini.

10) Montrer que $D(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}_0$. Cette inclusion est-elle une égalité ?

$$\text{Pour chaque complexe } \lambda \neq -1, \text{ on note } E_\lambda = \operatorname{Ker}\left(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\right).$$

11) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

12) Déterminer toutes les valeurs de λ telles que $E_\lambda \subset \mathcal{P}$. Et toutes les valeurs de λ telles que $E_\lambda \subset \mathcal{P}_0$.