D.S. n° 3 de mathématiques

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème.

Les calculatrices sont interdites.

On attachera un grand soin à la rédaction.

En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

14

— Exercice 1 —

On étudie la fonction $F\ :]-\infty,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ appelée le **dilogarithme**.

3 **1)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ est convergente. $\int_0^1$ cv ssi $\int_0^{1/2}$ et $\int_{1/2}^1$ convergent 0,5
$\int_0^{1/2}$ 1 $\int_{1/2}^1$ 1,5

2 **2)** On note $\lambda = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$. Montrer que $\lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx$. CDV 1 Hyp 1

2 **3)** Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-kx}\,dx$ converge et la calculer.

2 **4)** En déduire que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} x\,\frac{1-e^{-nx}}{e^x-1}\,dx$. 1,5 calcul
0,5 Pb en 0

1 **5)** Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $x \leq e^x - 1$.

2,5 **6)** En déduire que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \lambda - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$. 0,5 $0 \leq \lambda - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ 0,5 $= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x-1}dx$ 1,5 $\leq \frac{1}{n}$

1,5 **7)** Qu'en déduire ? 0,5 Théo. des gendarmes
0,5 $\sum \frac{1}{k^2}$ cv $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 0,5

14

— Exercice 2 —

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\, dt$$

qu'on ne cherchera pas à calculer.

2 **1)** Montrer que la fonction f est décroissante.

3 **2)** Soit x_0 un réel strictement positif.
Montrer que, pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2 \cdot e \cdot |x - x_0|}{x_0^2}. \quad 2$$

Qu'en déduire ? f continue 1

2 **3)** Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}. \quad 1$$

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ 0,5 ou $f(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$ 1

Qu'en déduire ?

2 **4)** Montrer qu'il existe un réel positif M (que l'on déterminera) tel que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$e^t - 1 \leq M \cdot t.$$

2 **5)** Soit g la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t}\, dt.$$

Montrer que la fonction g est bornée.

3 **6)** En déduire que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0^+.

32

— Problème —

Soient T un entier naturel non nul et u une suite complexe.
On dit que u est périodique de période T si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+T} = u_n$.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites complexes T- périodiques.
On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes bornées.

On fixe c la suite constante égale à 1 et w la suite $\left(e^{2in\pi/T}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\mathcal{B}$ est stable par c.l. 2 $\quad 0 \in \mathcal{B}$ 0,5 $\quad 0 \in \mathcal{P}$ $\quad \mathcal{P}$ est stable par c.l. 0,5 $\quad \mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ 1,5

5 **1)** Montrer que $\mathcal{B}$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel et que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$. Les suites c et w sont-elles des éléments de $\mathcal{P}$? 0,5

2 **2)** En utilisant l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{C}^T \\ u & \mapsto & (u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}) \end{array}$, déterminer la dimension de $\mathcal{P}$.

0,5 φ linéaire 1 bijective $\dim \mathcal{P} = \dim \mathbb{C}^T = T$ 0,5

$$\text{Pour tous } u \in \mathcal{P} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } A(u,n) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} u_{n+k}.$$

1 **3)** La suite u étant fixée, démontrer que le complexe $A(u,n)$ ne dépend pas de l'entier n choisi.
Ce nombre complexe, dépendant uniquement de u, sera désormais noté $M(u)$ et appelé la moyenne de u.

2 **4)** Calculer $M(c)$ et $M(w)$.
0,5 1,5

1,5 **5)** Montrer que l'application $M : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{C} \\ u & \mapsto & M(u) \end{array}$ est une forme linéaire et que son noyau $\operatorname{Ker} M$ est un hyperplan $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$. 0,5 M linéaire 0,5 non nulle car... 0,5

2,5 **6)** Démontrer que l'application $\Pi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ u & \mapsto & u - M(u)c \end{array}$ est un projecteur. Sur quel sous-espace vectoriel ? parallèlement à quel sous-espace vectoriel ?

$\Pi \circ \Pi = \Pi$ car... 1 $\quad$ 0,5 sur $\mathcal{P}_0$ 1 // à Vect(c)

$$\text{On définit l'endomorphisme } D : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \text{ et on appelle } D(u) \text{ la dérivée de } u.$$

0,5 **7)** Déterminer une base du noyau de D.

0,5 **8)** Montrer que $D(w)$ est une suite géométrique.

4 **9)** Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par D et que l'endomorphisme $\hat{D} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ u & \mapsto & D(u) \end{array}$ est bien défini.
2 2

5 **10)** Montrer que $D(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}_0$. Cette inclusion est-elle une égalité ?
2 3 $\neq -1$

$$\text{Pour chaque complexe } \lambda, \text{ on note } E_\lambda = \operatorname{Ker}\left(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\right).$$

4 **11)** Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

4 **12)** Déterminer toutes les valeurs de λ telles que $E_\lambda \subset \mathcal{P}$. Et toutes les valeurs de λ telles que $E_\lambda \subset \mathcal{P}_0$.
2 2