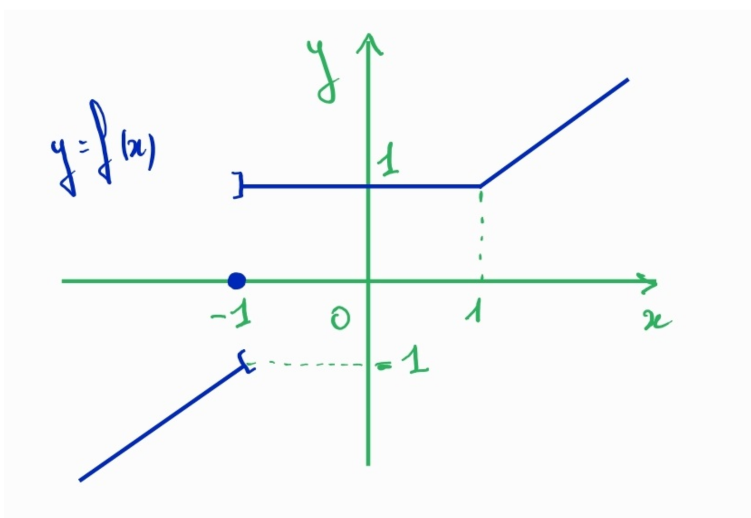
Corrigé du D.S. n° 4 de mathématiques

Exercice

1) Si $|x| > 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Si $|x| < 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Si $x = -1$, alors $f_n(-1) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x = 1$, alors $f_n(1) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction

$$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x \text{ si } x < -1,\ 0 \text{ si } x = -1,\ 1 \text{ si } -1 < x \leq 1,\ x \text{ si } x > 1.$$



2) La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas continue en -1.

3) Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x-1}{1+x^{2n}} \leq \frac{x-1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}.$$

4) La question précédente montre que $\frac{1}{2n}$ est un majorant de la fonction $|f_n - f|$. Or le *sup* est le plus petit majorant. D'où $0 \leq \sup\limits_{]1,+\infty[} |f - f_n| \leq \dfrac{1}{2n}$. D'après le théorème des gendarmes, $\sup\limits_{]1,+\infty[} |f - f_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $]1, +\infty[$.

5) Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}.$$

D'où $\sup\limits_{[0,1]} |f - f_n| \leq \dfrac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Problème (tiré de CCP 1 - PC - 2013)

Partie I

1) Soit $z \in \mathbb{K}$: $\chi_A(z) = \begin{vmatrix} z & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = (z+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = (z+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-1 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = (z-1)^2(z+2)$.

Donc $Sp(A) = \{1, 2\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim E_1(A) \leq 1 \\ 1 \leq \dim E_{-2}(A) \leq 2 \end{cases}$.

Le vecteur colonne $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ est un vecteur propre de A car $AU_1 = -2U_1$ et $U_1 \neq 0$. Or la dimension du sous-espace propre $E_{-2}(A)$ est 1. D'où $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}(U_1)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$:

$$AX = 1X \iff \begin{cases} -y - z = x \\ -x - z = y \\ -x - y = z \end{cases} \iff x + y + z = 0 \iff z = -x - y \iff X = xU_2 + yU_3.$$

Les vecteurs $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, linéairement indépendants, forment donc une base de $E_1(A)$.

2) Soit $z \in \mathbb{K}$: $\chi_B(z) = \begin{vmatrix} z-3 & 3 & 1 \\ 0 & z-2 & 0 \\ -1 & 3 & z-1 \end{vmatrix} = (z-2) \begin{vmatrix} z-3 & 1 \\ -1 & z-1 \end{vmatrix} = (z-2)^3$.

Donc $Sp(B) = \{2\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$:

$$BX = 2X \iff \begin{cases} 3x - 3y - z = 2x \\ 2y = 2y \\ x - 3y + z = 2z \end{cases} \iff x - 3y - z = 0 \iff z = x - 3y \iff X = xV_1 + yV_3.$$

Les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T$, linéairement indépendants, forment donc une base de $E_2(B)$.

3) Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} X \in E_1(A) \cap E_2(B) &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 3y - z = 0 & L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y = 0 & L_1 + L_2 \\ 4y + 2z = 0 & L_1 - L_2 \end{cases} \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Donc le vecteur colonne $W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ forme une base de $E_1(A) \cap E_2(B)$.

4) D'une part $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(W)$. D'autre part $E_{-2}(A) \cap E_2(B) = \{0\}$ car le vecteur U_1 n'appartient pas à $E_2(B)$ car $BU_1 \neq 2U_1$. Donc l'ensemble des vecteurs propres communs aux matrices A et B est $\mathrm{Vect}(W) \setminus \{0\}$.

Partie II

1) **a)** e est un vecteur propre à la fois pour A et B, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tel que $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$. Donc $(AB - BA)e = ABe - BAe = A(\mu e) - B(\lambda e) = \lambda\mu e - \mu\lambda e = 0$. Donc $e \in \mathrm{Ker}([A, B])$.

b) Par hypothèse e est non nul, on a donc montré $\dim \mathrm{Ker}([A, B]) \geq 1$. Or $[A, B]$ est une matrice carrée de taille n, donc le théorème du rang permet d'en déduire $\mathrm{rg}([A, B]) \leq n - 1 < n$.

2) Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n \geq 1$, il existe $\lambda \in Sp(A)$. Puisque $[A, B] = O_n$, $\mathrm{Ker}([A, B]) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Donc $E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A, B])$, donc A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

3) **a)** On suppose que le λ introduit par l'énoncé est celui dont l'existence est donnée par la propriété $\mathcal{H}$.
Soit $X \in E_\lambda(A)$. Alors $X \in \mathrm{Ker}(AB - BA)$, donc $(AB - BA)X = 0$, donc $ABX = BAX$.
Par conséquent $A\Psi(X) = ABX = BAX = B(\lambda X) = \lambda\Psi(X)$, donc $\Psi(X) \in E_\lambda(A)$, donc Ψ définit une application de $E_\lambda(A)$ dans lui-même.
Enfin, si $X, Y \in E_\lambda(A)$, $a, b \in \mathbb{K}$, on a $\Psi(aX+bY) = B(aX+bY) = aBX+bBY = a\Psi(X)+b\Psi(Y)$, donc Ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

b) Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $E_\lambda(A) \neq \{0\}$, Ψ admet une valeur propre μ et un vecteur propre associé $Y \in E_\lambda(A)$.
On a alors bien $Y \neq 0$, $AY = \lambda Y$, et $BY = \Psi(Y) = \mu Y$, donc Y est un vecteur propre commun à A et B.

4) En dimension 1, tous les endomorphismes sont des homothéties. Donc tout vecteur non nul (il en existe bien en dimension 1) est un vecteur propre commun à 2 endomorphismes, ce qui démontre $\mathcal{P}_1$.

5) **a)** Puisque A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$, $E_\lambda(A) \not\subset \mathrm{Ker}C$.
Il existe donc $x \in E_\lambda(A)$ tel que $x \notin \mathrm{Ker}C$, autrement dit $Au = \lambda u$ et $Cu \neq 0$.

b) $v \in Im(C)$ qui est un espace vectoriel, donc $\mathrm{Vect}(v) \subset ImC$.
De plus $v \neq 0$, donc $\dim \mathrm{Vect}(v) = 1 = \mathrm{rg}(C)$, donc $\mathrm{Vect}(v) = Im(C)$.

c) $v = Cu = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu = (A - \lambda I_n)(Bu) \in Im_\lambda(A)$.
Donc $ImC = \mathrm{Vect}(v) \subset Im_\lambda(A)$.

d) $\mathrm{rg}(C) = 1$, donc l'inclusion précédente donne $\dim Im_\lambda(A) \geq \dim ImC = 1$.
D'autre part, λ est valeur propre de A, donc $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \geq 1$.
Par théorème du rang, $\dim Im_\lambda(A) \leq n - 1$.

e) $[A, A - \lambda I_n] = A(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)A = A^2 - \lambda A - A^2 + \lambda A = 0_n$.
$[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - \lambda B - AB + \lambda B = BA - AB = -C$.
A et $A - \lambda I_n$ commutent, donc $Im_\lambda(A)$ est stable par A, donc φ définit un endomorphisme de $Im_\lambda(A)$ (la linéarité est triviale).
Soit $Y \in Im_\lambda(A)$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = (A - \lambda I_n)X$.
Alors $BY = B(A - \lambda I_n)X = (A - \lambda I_n)BX - CX$.
Or $CX \in Im_\lambda(A)$ d'après 5.c, $(A - \lambda I_n)X$ aussi par définition, donc $BY \in Im_\lambda(A)$.
Donc $Im_\lambda(A)$ est stable par B, donc ψ définit un endomorphisme de $Im_\lambda(A)$ (la linéarité est triviale).

f) D'une part, on pose $k = \dim Im_\lambda(A) \in [\![1, n-1]\!]$ d'après 5-d.
D'autre part $\varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$ est une restriction de $AB - BA$, donc $\mathrm{rg}([\varphi, \Psi]) \leq \mathrm{rg}([A, B]) = 1$.
On peut donc appliquer la propriété $\mathcal{P}_k$, donc φ et ψ admettent un vecteur propre commun.
Par définition de φ et ψ, ce vecteur est aussi un vecteur propre commun à A et B.

6) On raisonne par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$:
On a montré $\mathcal{P}_1$ en II-4, d'où l'initialisation.
Soit $n \geq 2$. On suppose $\mathcal{P}_k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, et on montre $\mathcal{P}_n$.

On considère E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et φ, ψ deux endomorphismes de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$. On introduit A et B les matrices de φ et ψ dans une même base de E.
Si A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$, elles admettent un vecteur propre commun d'après II-3-b.
Si A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$, elles admettent un vecteur propre commun d'après II-5-f.
Dans tous les cas, A et B admettent un vecteur propre commun, donc φ et ψ aussi. D'où $\mathcal{P}_n$, ce qui achève la récurrence.
On a bien démontré pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$.

Partie III

1) $g(P) = X^{2n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{a_k}{X^k} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k} = \sum_{i=0}^{2n} a_{2n-i} X^i$ en effectuant le changement d'indice $i = 2n - k$.

2) Par propriété de la dérivation de polynômes, f est linéaire et pour tout $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, $f(P) \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, donc f est un endomorphisme de E.
L'expression démontrée à la question précédente montre que l'on peut considérer $g : E \to E$.
Soient $P, Q \in E$, $a, b \in \mathbb{C}$.
$g(aP + bQ) = X^{2n}(aP + bQ)(\frac{1}{X}) = X^{2n}(aP(\frac{1}{X}) + bQ(\frac{1}{X})) = aX^{2n}P(\frac{1}{X}) + bX^{2n}Q(\frac{1}{X}) = ag(P) + bg(Q)$.
Donc g est un endomorphisme de E.

3) **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $P \in E$ tel que $g(P) = \lambda P$.
On suppose que $\deg(P) \leq n - 1$, on peut donc écrire $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, avec $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.
On a alors $g(P) = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_{2n-k} X^k = \lambda P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda a_k X^k$.
Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient pour tout $k \in [\![n + 1, 2n]\!]$, $a_{2n-k} = 0$, donc $P = 0$.
On a montré qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ ne peut pas être vecteur propre de g, autrement dit les vecteurs propres de g sont de degré supérieur ou égal à n.

b) $g(X^n) = \frac{X^{2n}}{X^n} = X^n$, donc X^n (non nul) est vecteur propre de g associé à la valeur propre 1.

4) **a)** Soit $P \in E$. Si $\deg(P) \leq i - 1$, alors $f^i(P) = P^{(i)} = 0$ par propriété de la dérivation, donc $P \in \mathrm{Ker}(f^i)$.
Si $\deg(P) \geq i$, alors $\deg(P^{(i)}) = \deg P - i \geq 0$, donc $P \notin \mathrm{Ker}(f^i)$.
Donc $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

b) $i \geq 1$, donc $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X] \neq \{0\}$, donc 0 est valeur de f^i.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, que l'on suppose valeur propre de f^i, et P un vecteur propre associé. Alors $P^{(i)} = \lambda P$.
D'une part $\lambda \neq 0$, donc $\deg(\lambda P) = \deg P$. D'autre part, $P \neq 0$, donc $\deg(P^{(i)}) < \deg P$.
Ceci est absurde, donc λ n'est pas valeur propre de f^i.
On a bien montré $Sp(f^i) = \{0\}$.

5) On suppose tout d'abord que f^i et g possèdent un vecteur propre commun P. D'après la question 4, $\deg(P) \leq i - 1$. D'après la question 3-a, $\deg(P) \geq n$. D'où $n \leq i - 1$, c'est-à-dire $i \geq n - 1$.
On suppose maintenant $i \geq n - 1$. Alors X^n est un vecteur propre de g d'après 3-b, et
$X^n \in \mathbb{C}_{i-1}[X] = \mathrm{Ker}(f^i)$, donc c'est aussi un vecteur popre de f^i. f^i et g possèdent un vecteur propre commun dans ce cas. D'où l'équivalence.

6) $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 0 & 2n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$B_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & (0) & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & (0) & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$

7) **a)** Les expressions de A_1 et B_1 sont des cas particuliers des expressions trouvées plus haut.

$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $A_1^3 = 0_3$.

b) $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice est de rang 2.

$[A_1^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, cette matrice est aussi de rang 2.

c) A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun (d'après III-5), or $\mathrm{rg}([A_1, B_1]) = 2 < 3$, donc la condition nécessaire de II-1-b n'est pas suffisante.
A_1^2 et B_1 ont un vecteur propre commun (d'après III-5), or $\mathrm{rg}([A_1, B_1]) = 2 > 1$, donc la condition suffisante de II-6 n'est pas nécessaire.

Partie IV

1) On définit $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 = 0 \right\}$. Alors H est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (on obtient une base de H constituée des $n-1$ derniers vecteurs de la base canonique).
Donc $\dim(H \cap E_\lambda(A)) = \dim H + \dim E_\lambda(A) - \dim(H + E_\lambda(A)) \geq n - 1 + 2 - n = 1$.
Donc il existe $X \in H \cap E_\lambda(A)$ tel que $X \neq 0$. Ce X appartient à $\mathcal{N}$, donc est sous forme normale, et est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

2) **a)** $n \geq 2$, on peut donc considérer la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$, et tous les autres coefficients nuls.
Cette matrice est antisymétrique et non nulle, donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0_n\}$.

b) En notant m_{ij} les coefficients de M, la condition M antisymétrique donne $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $m_{ji} = -m_{ij}$, donc $m_{ii} = -m_{ii}$, donc $m_{ii} = 0$.
Ainsi chaque colonne de M admet un coefficient nul, donc appartient à $\mathcal{N}$.

c) Soient $M, M' \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $a, a' \in \mathbb{C}$.
${}^t(\varphi(M)) = {}^t(AM) + {}^t(M^tA) = {}^tM^tA + A^tM = -M^tA - AM = -\varphi(M)$, donc $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
$\varphi(aM + a'M') = A(aM + a'M') + (aM + a'M')^tA$
$= aAM + a'AM' + aM^tA + a'M'^tA = a\varphi(M) + a'\varphi(M')$, donc φ est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
${}^t(\psi(M)) = {}^t(AM^tA) = A^tM^tA = -AM^tA = -\psi(M)$, donc $\psi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
$\psi(aM + a'M') = A(aM + a'M')^tA = aAM^tA + a'AM'^tA = a\psi(M) + a'\psi(M')$, donc ψ est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

d) Avec les mêmes notations, $\varphi(\psi(M)) = AAM^tA + AM^tA^tA$.
$\psi(\varphi(M)) = A(AM + M^tA)^tA = AAM^tA + AM^tA^tA$, donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

3) **a)** X_1 est une matrice colonne, ${}^tX_2$ une matrice ligne, donc $X_1{}^tX_2$ est une matrice carrée de taille n, de même pour B.
${}^tB = X_2^tX_1 - X_1^tX_2 = -B$, donc $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
X_2 est non nul, donc admet un coefficient non nul, que l'on appelle y, situé en i-ième position.
Alors la i-ème colonne de $X_1^tX_2$ est yX_1, également non nulle.
Or la i-ème colonne de $X_2^tX_1$ est colinéaire à X_2, et (X_1, X_2) est libre (ce sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes).
Donc la i-ème colonne de $X_1^tX_2 - X_2^tX_1$ est non nulle, donc $B \neq 0_n$.
$AB + B^tA = AX_1^tX_2 - AX_2^tX_1 + X_1^tX_2^tA - X_2^tX_1^tA$
$= \lambda X_1^tX_2 - \lambda_2 X_2^tX_1 + \lambda_2 X_1^tX_2 - \lambda_1 X_2^tX_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)B$.
$AB^tA = AX_1^tX_2^tA - AX_2^tX_1^tA = \lambda_1\lambda_2 B$.

b) $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = A^2B - (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_1\lambda_2 B = A^2B - A(AB + B^tA) + AB^tA = 0_n$.

c) On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de B. $B \neq 0_n$, donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $C_k \neq 0$.
La relation $(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$ donne en particulier $(A - \lambda_2 I_n)C_k = 0$, donc C_k est un vecteur propre de A.
Enfin, puisque $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $C_k \in \mathcal{N}$ (question 2-b).
Donc C_k est un vecteur propre de A sous forme normale.

d) On note maintenant $D_1, \ldots, D_n$ les colonnes de $(A - \lambda_2 I_n)B$. De même, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $D_k \neq 0$.
On aura cette fois-ci $(A - \lambda_1 I_n)D_k = 0$, donc D_k est un vecteur propre de A.
Or $D_k = (A - \lambda_2 I_n)C_k$ et $C_k \in \mathcal{N}$, donc D_k est un vecteur propre de A sous forme normale.

4) **a)** $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 1 (IV-2-a).
φ et ψ définis en IV-2 sont des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ (IV-2-c) tels que $[\varphi, \psi] = 0$ (IV-2-d).
Quitte à considérer les matrices associées à ces endomorphismes, on peut leur appliquer les résultats des question II-2 et II-3 :
φ et ψ admettent un vecteur propre commun $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. Ce B vérifie les propriétés voulues.

b) $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = A^2B - A(AB + B^tA) + AB^tA = 0_n$.

c) Le polynôme $X^2 - \alpha X + \beta$ se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ en $(X - \gamma)(X - \delta)$, avec $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$.
On vérifie alors $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = (A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0_n$.

d) On mène un raisonnement similaire à celui de la question IV-3-c.

e) On a alors $(A - \gamma I_n)(A - \lambda I_n)B = 0_n$ avec λ valeur propre de A et $(A - \lambda I_n)B \neq 0_n$.
Un raisonnement similaire à celui de la question IV-3-d aboutit à la même conclusion.

f) On a $\delta \neq \lambda$, seule valeur propre de A. Donc δ n'est pas valeur propre de A, et $A - \delta I_n$ est inversible.
De plus $(A - \gamma I_n)$ et $(A - \delta I_n)$ commutent trivialement, on a donc $(A - \delta I_n)(A - \gamma I_n)B = 0$.
Puisque $A - \delta I_n$ est inversible, on en déduit $(A - \gamma I_n)B = 0$.

g) Dans ce dernier cas, on peut appliquer 4-d, et A possède un vecteur propre sous forme normale.
En rassemblant 4-d, 4-e, 4-f, on a montré qui si A n'admet qu'une seule valeur propre, alors elle possède un vecteur propre sous forme normale.
Or, pour $n \geq 1$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre, et on a traité en IV-3 le cas où A admet deux valeurs propres distinctes.
On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède un vecteur propre sous forme normale.