D.S. n° 4 de mathématiques

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient un exercice et un problème.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

1) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Vers quelle fonction f ? Représenter graphiquement cette fonction f.

2) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

3) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1, +\infty[$:

$$\frac{x - 1}{x^{2n} - 1} \leq \frac{1}{2n}.$$

4) La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $]1, +\infty[$?

5) Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[0, 1]$.

Problème

Notations — Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{C}$, le corps des complexes, pour corps de base.

Etant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \text{ et } u(G) \subset F$$

Etant donnés deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v.

On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0_n$.

Objectif — L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) l'endomorphisme u est échangeur ;

(C2) il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$;

(C3) les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties A et B est indépendante des autres. Les résultats de la partie D sont essentiels au traitement des parties E et F.

A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1) Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.

2) On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det(u)$.
Montrer que $u^2 = \delta^2 \mathrm{id}_E$, déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres.

3) Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u, une droite vectorielle D telle que $u(D) \not\subset D$ et en déduire que u est échangeur.

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

4) Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.

5) On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}$$

Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

6) On suppose ici F et G tous deux non nuls. On se donne une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \dots, g_p)$ de G. La famille $B = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est donc une base de E.
Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice de u dans B.

7) Déduire des questions précédentes que u vérifie **(C2)** et **(C3)**.
On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces F ou G est nul.

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

8) Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\mathrm{Ker}(f)$ à $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)$$

9) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)$, et que $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(b)$.

10) En déduire que u est échangeur.

D. Un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E. On se donne un nombre complexe arbitraire λ. On pose $v = f - \lambda \mathrm{id}_E$.

11) Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

12) Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que

$$\forall k \geq p, \quad \mathrm{Ker}(v^k) = \mathrm{Ker}(v^p)$$

On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme $\mathrm{Ker}(v^k)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'alors

$$\mathrm{Ker}(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(v^k)$$

et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question **D-2** et l'on pose

$$E_\lambda^c(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(v^k) = \mathrm{Ker}(v^p)$$

On notera que $E_\lambda^c(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

13) Montrer que $E_\lambda^c(f) = \mathrm{Ker}(v^{2p})$ et en déduire

$$E = E_\lambda^c(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$$

Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E_\lambda^c(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par f.

14) Montrer que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(v^p)$.
Montrer que si $E_\lambda^c(f)$ n'est pas nul alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^c(f)$.

15) On se donne ici un nombre complexe $\mu \neq \lambda$. On suppose que toute valeur propre de f différente de λ est égale à μ.
Montrer que $\mathrm{Im}(v^p) \subset E_\mu^c(f)$, puis que $E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$.
On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(v^p)$.

E. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité de l'énoncé suivant :

Théorème : Tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

16) Montrer que a et b commutent avec u^2.

On fixe maintenant un entier pair p tel que $E_0^c(u) = \mathrm{Ker}(u^p)$, donné par la question **D-2**.

17) Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Im}(u^p)$ est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_G et b_G sont de carré nul.

18) En déduire que u est échangeur.
On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la partie **C**.

F. La condition (C3) implique (C1)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Un endomorphisme u de E est dit **indécomposable** lorsque

(i) la condition **(C3)** est vérifiée par u

(ii) il n'existe aucune décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces non nuls, stables par u et tels que les endomorphismes induits u_F et u_G vérifient tous deux la condition **(C3)**.

Jusqu'à la question **3** incluse, on se donne un endomorphisme indécomposable u de E. On dispose en particulier d'un automorphisme φ de E tel que

$$-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$$

19) Montrer que φ^2 commute avec u.

20) Montrer que φ^2 possède une unique valeur propre λ. En déduire que les valeurs propres de φ sont parmi α et $-\alpha$, pour un certain nombre complexe non nul α.
On utilisera l'indécomposabilité de u ainsi que les résultats des questions **D-3** *et* **D-4**.

21) En déduire que u est échangeur.
On pourra appliquer le résultat final de la question **D-5**.

22) En déduire plus généralement que, pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, la condition **(C3)** implique la condition **(C1)**.