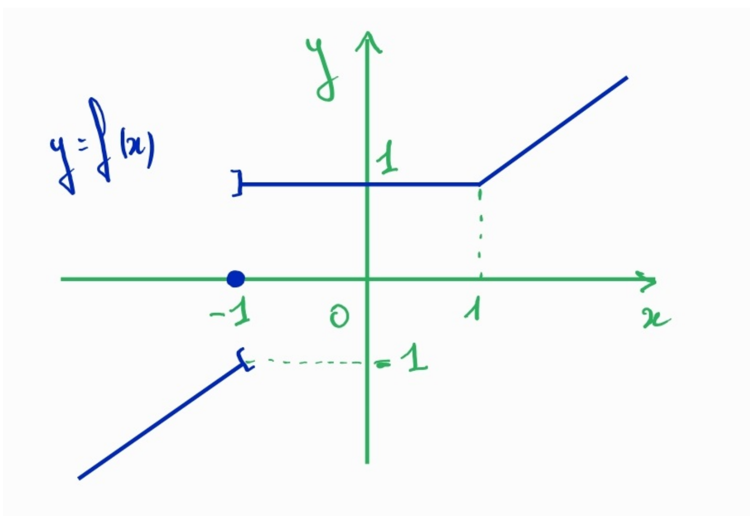
Corrigé du D.S. n° 4 de mathématiques

Exercice

1) Si $|x| > 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Si $|x| < 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Si $x = -1$, alors $f_n(-1) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x = 1$, alors $f_n(1) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction

$$f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x \text{ si } x < -1,\ 0 \text{ si } x = -1,\ 1 \text{ si } -1 < x \leq 1,\ x \text{ si } x > 1.$$



2) La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas continue en -1.

3) Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x-1}{1+x^{2n}} \leq \frac{x-1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}.$$

4) La question précédente montre que $\frac{1}{2n}$ est un majorant de la fonction $|f_n - f|$. Or le *sup* est le plus petit majorant. D'où $0 \leq \sup\limits_{]1,+\infty[} |f - f_n| \leq \dfrac{1}{2n}$. D'après le théorème des gendarmes, $\sup\limits_{]1,+\infty[} |f - f_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $]1, +\infty[$.

5) Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}.$$

D'où $\sup\limits_{[0,1]} |f - f_n| \leq \dfrac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Problème (Mines-Ponts 2 - PSI - 2017, durée : 3h)

A. Quelques considérations en dimension 2

1) Il existe un automorphisme φ de E tel que $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. Soient A et P les matrices de u et φ dans une base de E. Alors PAP^{-1} est la matrice de $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ dans cette même base et, selon les propriétés de la trace, on a

$$-\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(-u) = \operatorname{tr}(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \operatorname{tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(u)$$

c'est-à-dire $\operatorname{tr}(u) = 0$. $\boxed{\text{Si } u \text{ vérifie } \textbf{(C3)} \text{ alors } \operatorname{tr}(u) = 0}$

2) E étant de dimension 2, $\chi_u = X^2 - \operatorname{Tr}(u)X + \det(u) = X^2 - \delta^2$.

Selon le théorème de Cayley-Hamilton, on en déduit que $\boxed{u^2 = \delta^2 \mathrm{Id}_E}$.

Comme $\det(u) \neq 0$, on a $\delta \neq 0$ et $\chi_u = (X-\delta)(X+\delta)$. Donc $\boxed{\operatorname{Sp}(u) = \{\delta, -\delta\}}$. De plus, χ_u est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable et $\boxed{\text{ses deux sous-espaces propres sont de dimension 1}}$.

3) Soient e_1 (resp. e_2) un vecteur propre de u associé à δ (resp. à $-\delta$). D'après le cours, ils sont linéairement indépendants et donc $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$ sont non nuls et non colinéaires, et

$$u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2) = \delta e_1 - \delta e_2 = \delta(e_1 - e_2)$$

$\boxed{D = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2) \text{ est une droite}}$ et elle n'est pas stable par u puisque $\delta \neq 0$. Donc $\boxed{u(D) \not\subset D}$.

Posons $F = D$ et $G = u(D) = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2)$. Ce sont des droites non égales, donc en somme directe. Par dimension, ce sont des supplémentaires de E. Par définition, $u(F) = G$, et comme $u(e_1 - e_2) = \delta(e_1 + e_2)$, on a $u(G) = F$. Ainsi $\boxed{u \text{ est échangeur}}$.

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

4) Un calcul par blocs montre que $\boxed{\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}}$ et aussi $\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}^2 = 0_{n+p}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} \text{ est la somme de deux matrices de carré nul}}$$

5) On vérifie par un calcul par blocs, par exemple, que $D^2 = I_{n+p}$. $\boxed{D \text{ est donc inversible d'inverse } D^{-1} = D}$.

Le calcul par blocs donne aussi

$$DMD^{-1} = DMD = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -B \\ -A & 0_p \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{DMD^{-1} = -M}$, ce qui signifie que $\boxed{M \text{ et } -M \text{ sont semblables}}$.

6) Comme $u(F) \subset G$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(f_j) \in G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_p)$ et ses coordonnées selon $f_1, \ldots, f_n$ dans $\mathcal{B}$ sont nulles. D'où la présence d'un bloc supérieur gauche nul (0_n).
De même, comme $u(G) \subset F$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(g_j) \in F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$ et ses coordonnées selon $g_1, \ldots, g_p$ dans $\mathcal{B}$ sont nulles. D'où la présence d'un bloc inférieur droit nul (0_p).

Finalement, il existe $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, telle que $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}}$.

7) • Supposons F et G non nuls.
Notons $n = \dim F$ et $p = \dim G$. D'après la question précédente, il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des matrices $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$. D'après la question **1**, il existe deux matrices $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M_1 + M_2$. En notant a et b les endomorphismes associés à M_1 et M_2 dans $\mathcal{B}$, on a $u = a + b$ et $a^2 = b^2 = 0$. Donc u vérifie **(C2)**.
D'après la question **2**, il existe $P \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbb{C})$ telle que $-\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1}$. En notant φ l'endomorphisme de E associé à P dans $\mathcal{B}$, φ est inversible, car P l'est, et $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. Donc u vérifie **(C3)**.
• Supposons $F = \{0\}$. Alors $G = E$ et $\mathrm{Im}(u) = u(G) \subset F = \{0\}$. Donc u est l'endomorphisme nul et vérifie $u = 0 + 0$ et $-u = 0 = \mathrm{id}_E \circ u \circ \mathrm{id}_E^{-1}$, i.e. u vérifie **(C2)** et **(C3)**. De manière symétrique, on obtient la même conclusion lorsque $G = \{0\}$.

$$\boxed{u \text{ vérifie } \textbf{(C2)} \text{ et } \textbf{(C3)}}$$

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

8) Si $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe y tel que $x = f(y)$ et donc $f(x) = f^2(y) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)}$. On en déduit que $\mathrm{rg}(f)\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et, par théorème du rang $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$. On a donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)}$.

9) Soit $x \in \mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(b)$: $u(x) = a(x) + b(x) = 0$ et l'injectivité de u entraîne $x = 0$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Ker}(b)$ sont en somme directe. Soit $x \in E$. Comme u est bijectif, $x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \mathrm{Ker}(a) + \mathrm{Ker}(b)$ puisque $a^2 = b^2 = 0$. Ainsi $\boxed{E = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)}$.

Comme $a^2 = b^2 = 0$, le résultat de la question précédente appliquée à a et à b donne $\dim(\mathrm{Ker}(a)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(b)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)$. $\mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)$ étant un sous-espace vectoriel de E, on a alors :

$$\dim(E) \geq \dim(\mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)) = \dim(\mathrm{Ker}(a)) + \dim(\mathrm{Ker}(b)) \geq 2 \times \frac{1}{2}\dim(E) = \dim(E)$$

Ces inégalités sont alors des égalités, ce qui prouve que $\dim(\mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)) = \dim(E)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(a)) = \dim(\mathrm{Ker}(b)) = \frac{1}{2}\dim(E)$. Le théorème du rang appliqué à a et à b donnent ensuite $\dim(\mathrm{Im}(a)) = \dim(\mathrm{Ker}(a))$ et $\dim(\mathrm{Im}(b)) = \dim(\mathrm{Ker}(b))$. Par inclusion et égalité des dimensions, on obtient finalement :

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b), \text{ ainsi que } \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Ker}(a) \text{ et } \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Ker}(b)}$$

10) Posons $F = \mathrm{Ker}(a)$ et $G = \mathrm{Ker}(b)$. La question précédente donne $E = F \oplus G$ et :

— pour tout $x \in F$, $u(x) = a(x) + b(x) = b(x) \in \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Ker}(b) = G$, et donc $u(F) \subset G$.

— pour tout $x \in G$, $u(x) = a(x) + b(x) = a(x) \in \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Ker}(a) = F$, et donc $u(G) \subset F$.

Ainsi, $\boxed{u \text{ est échangeur}}$.

D. Un principe de décomposition

11) Soient $k \in N$ et $x \in \mathrm{Ker}(v^k)$. Alors $v^{k+1}(x) = v(v^k(x)) = v(0) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(v^{k+1})$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(v^k) \subset \mathrm{Ker}(v^{k+1})$ et $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{Ker}(v^k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ est croissante pour l'inclusion}}$.

12) L'ensemble $A = \{\dim(\mathrm{Ker}(v^k))\}$ est une partie non vide (car contient $\dim(\mathrm{Ker}(v^0)) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E)) = 0$) et majorée par $\dim(E)$ de $\mathbb{N}$, donc admet un maximum d. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(v^p)) = d$. Pour tout entier $k \geq p$, d'après la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(v^p) \subset \mathrm{Ker}(v^k)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(v^k)) \geq d$, puis $\dim(\mathrm{Ker}(v^k)) = d$, par maximalité de d. Ainsi, par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{\mathrm{Ker}(v^k) = \mathrm{Ker}(v^p)}$.

En particulier, comme $2p \geq p$, on a $\mathrm{Ker}(v^{2p}) = \mathrm{Ker}(v^p)$ de dimension d, et $\boxed{p \text{ peut être choisi pair}}$.

L'inclusion $\mathrm{Ker}(v^p) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(v^k)$ est évidente. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(v^k) \subset \mathrm{Ker}(v^p)$, par la question précédente si kp, et par ce qu'on vient de démontrer si $k \geq p$. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(v^k)}$.

13) Par croissance de la suite $(\mathrm{Ker}(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ établie précédemment, on a $E^c_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(v^p) \subset \mathrm{Ker}(v^{2p})$ et, par définition de $E^c_\lambda(f)$, on a $\mathrm{Ker}(v^{2p}) \subset E^c_\lambda(f)$. Donc $\boxed{E^c_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(v^{2p})}$.

Soit $x \in E^c_\lambda(f) \cap \mathrm{Im}(v^p)$. Il existe y tel que $x = v^p(y)$ et $v^{2p}(y) = v^p(x) = 0$ montre que $y \in \mathrm{Ker}(v^{2p}) = \mathrm{Ker}(v^p)$ et donc que $x = v^p(y) = 0$. Les sous-espaces $E^c_\lambda(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont alors en somme directe.

Par théorème du rang, $\dim(E_\lambda^c(f)) + \dim(\mathrm{Im}(v^p)) = \dim(\mathrm{Ker}(v^p)) + \dim(\mathrm{Im}(v^p))) = \dim(E)$.

On en déduit que $\boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)}$.

Comme $v^p = (f - \lambda \mathrm{id}_E)^p$ est un polynôme en f, il commute alors avec f et, d'après le cours,

$$\boxed{E_\lambda^c(f) = \mathrm{Ker}(v^p) \text{ et } \mathrm{Im}(v^p) \text{ sont stables par } f}$$

14) Supposons, par l'absurde, que λ soit valeur propre de $f|_{\mathrm{Im}(v^p)}$. Il existe alors $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$ c'est à dire tel que $x \in \mathrm{Ker}(v) \subset E_\lambda^c$. Comme $E_\lambda^c(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont en somme directe, $x = 0$ et ceci est contradictoire. Donc $\boxed{\lambda \text{ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par } f \text{ sur } \mathrm{Im}(v^p)}$.

Supposons $E_\lambda^c(f) \neq \{0\}$ et notons g l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^c(f)$. Alors le polynôme $(X-\lambda)^p$ annule g, puisque $E_\lambda^c(f) = \mathrm{Ker}((f - \lambda \mathrm{id}_E)^p)$. Donc toute valeur propre de g en est racine. Ainsi, λ est la seule valeur propre possible de g et, comme E_λ^c est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, g possède au moins une valeur propre (puisque χ_g est scindé sur $\mathbb{C}$).

Ainsi, $\boxed{\lambda \text{ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par } f \text{ sur } E_\lambda^c(f)}$.

15) Notons h l'endomorphisme induit par f sur $F = \mathrm{Im}(v^p)$. Toute valeur propre de h est valeur propre de f et appartient donc à $\{\lambda, \mu\}$. On déduit de la question précédente que la seule valeur propre possible de h est μ. Comme χ_h est scindé sur $\mathbb{C}$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\chi_h = (X - \mu)^q$ et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(h - \mu \mathrm{id}_F)^q = 0$. Donc $\mathrm{Im}(v^p) = \mathrm{Ker}(h - \mu \mathrm{id}_F)^q \subset \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)^q \subset E_\mu^c(f)$ et, par suite, $\boxed{\mathrm{Im}(v^p) \subset E_\mu^c(f)}$. Il vient $E = E_\lambda^c(f) + \mathrm{Im}(v^p) \subset E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f) \subset E$, et donc $E = E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f)$. Montrons que cette somme est directe. Soit $G = E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f)$. Comme $E_\lambda^c(f)$ et $E_\mu^c(f)$ sont stables par f, G l'est aussi. L'endomorphisme induit par f sur G ne peut posséder que λ comme valeur propre, puisque $G \subset E_\lambda^c(f)$ et, de même, il ne peut posséder que μ comme valeur propre, puisque $G \subset E_\mu^c(f)$. Etant donné que $\lambda \neq \mu$, il n'a aucune valeur propre, alors que G est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Donc nécessairement, $G = \{0\}$ et on a :

$$\boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)}$$

E. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

16) $u^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$. Ainsi $a \circ u^2 = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = u^2 \circ a$.

On procède de même avec b pour conclure que $\boxed{a \text{ et } b \text{ commutent avec } u^2}$.

17) Comme p est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$ et, comme a et b commutent avec u^2, ils commutent avec $u^p = (u^2)^k$. D'après le cours, $\boxed{\mathrm{Im}(u^p) \text{ est alors stable par } a \text{ et par } b}$.

Pour tout $x \in \mathrm{Im}(u^p)$, $(a_G)^2(x) = a_G(a_G(x)) = a(a(x)) = a^2(x) = 0$ et, de même $(b_G)^2(x) = 0$.

Donc $\boxed{(a_G)^2 = 0 \text{ et } (b_G)^2 = 0}$.

18) L'endomorphisme u commute avec u^p et G est stable par u. L'endomorphisme induit u_G est tel que $u_G = a_G + b_G$. D'après la question précédente, il vérifie la condition **(C2)**. Or u_G est injectif, puisque 0 n'est pas valeur propre de u_G (d'après la question **D-4**). Comme G est de dimension finie, il vient que u_G est un automorphisme de G. Le résultat final de la partie **C** montre donc que u_G est échangeur.
D'autre part, $F = E_0^c(u)$ est stable par u. L'endomorphisme induit u_F est nilpotent puisque, pour tout $x \in F$, $(u_F)^p(x) = u^p(x) = 0$. Le résultat admis en début de partie assure alors que u_F est échangeur.
Il existe alors des sous-espaces vectoriels F_1, F_{-1}, G_1 et G_{-1} de E tels que $F = F_1 \oplus F_{-1}$, $G = G_1 \oplus G_{-1}$ et, pour tout $i \in \{1, -1\}$, $u_F(F_i) \subset F_{-i}$ et $u_G(G_i) \subset G_{-i}$. On a alors :

$$E = F \oplus G = (F_1 \oplus F_{-1}) \oplus (G_1 \oplus G_{-1}) = \underbrace{(F_1 \oplus G_1)}_{H_1} \oplus \underbrace{(F_{-1} \oplus G_{-1})}_{H_{-1}}$$

— Pour tout $x \in F_1 \cup G_1$, on a $u(x) \in H_{-1}$ donc $u(H_1) \subset H_{-1}$, par linéarité de u.

— Pour tout $y \in F_{-1} \cup G_{-1}$, on a $u(y) \in H_1$ donc $u(H_{-1}) \subset H_1$, par linéarité de u.

Ainsi, $\boxed{u \text{ est échangeur}}$.

F. La condition (C3) implique (C1)

19) Composons l'identité $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ à droite par φ^{-1} et à gauche par φ. On obtient :

$$u = -\varphi \circ u \circ \varphi^{-1} = \varphi^2 \circ u \circ \varphi^{-2}$$

On en déduit, en composant à droite par φ^2, que $\boxed{\varphi^2 \circ u = u \circ \varphi^2}$.

20) Comme on est dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, φ^2 possède une valeur propre λ, qui est non nulle puisque φ^2 est bijectif. D'après la question **D-3**, il existe un entier p tel que $E = E_\lambda^c(\varphi^2) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$, avec $v = \varphi^2 - \lambda \mathrm{id}_E$.
Les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Ker}(v^p)$ et $G = \mathrm{Im}(v^p)$ sont stables :

— par φ car φ commute avec $v^p = (\varphi^2 - \lambda \mathrm{id}_E)^p$

— par φ^{-1} car φ^{-1} commute avec v^p

— par u car u commute avec φ^2, donc aussi avec v^p

On sait que $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ et comme F et G sont stables par tous les endomorphismes mis en jeu, cette relation reste vraie pour les endomorphismes induits sur F et G. L'indécomposabilité de u indique que F ou G est nul et comme F ne 'est pas, c'est que G l'est et que $F = E$. Ainsi, $(X - \lambda)^p$ annule φ^2 et $\boxed{\lambda \neq 0 \text{ est l'unique valeur propre de } \varphi^2}$.

Si μ est valeur propre de φ et x vecteur propre associé alors $\varphi(x) = \alpha x$ et donc $\varphi^2(x) = \alpha^2 x$ et donc $\alpha^2 = \lambda$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{\alpha, -\alpha\}, \text{ avec } \alpha^2 = \lambda \neq 0}$$

21) φ admettant au plus deux valeurs propres, on peut lui appliquer la question **D-5** et obtenir :

$$E = E^c_\alpha(\varphi) \oplus E^c_{-\alpha}(\varphi)$$

Notons que l'hypothèse **(C3)** donne $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$ et donc :

$$u \circ (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E) = -(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E) \circ u$$

Comme $\varphi - \alpha \mathrm{I}_E$ et $\varphi + \alpha \mathrm{I}_E$ commutent, par récurrence sur k, on montre que :

$$u \circ (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^k = (-1)^k (\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^k \circ u$$

Soit $x \in E^c_\alpha(\varphi)$, c'est à dire que $(\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^p(x) = 0$. On a alors $(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^p(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in E^c_{-\alpha}(\varphi)$. Ainsi, $u(E^c_\alpha(\varphi)) \subset E^c_{-\alpha}(\varphi)$ et, de la même façon, $u(E^c_{-\alpha}(\varphi)) \subset E^c_\alpha(\varphi)$. En conclusion,

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

22) On procède par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel E.

- Initialisation : on suppose que u est un endomorphisme d'un espace de dimension 1 qui vérifie **(C3)**. Comme l'espace est de dimension 1, u est indécomposable et la question précédente montre qu'il est échangeur.
- Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'au rang n. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n+1$ qui vérifie **(C3)**.
  - Si u est indécomposable, il est échangeur avec ce qui précède.
  - Sinon, il existe une décomposition $E = F \oplus G$ avec F et G non nuls et stables par u et tels que u_F et u_G vérifient **(C3)**. L'hypothèse de récurrence s'applique à u_F et u_G et permet de décomposer F et G. Comme en question **E-3**, on en déduit une décomposition de E qui montre que u est échangeur.

$$\boxed{\textbf{(C3)} \text{ implique } \textbf{(C1)}}$$