

D.S. N° 5 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème

Les calculatrices sont interdites.

EXERCICE 1 – PROBABILITÉS

Définitions et notations

- Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.
- On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :
 - A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel 1. Le perdant est éliminé du tournoi et le gagnant reste en jeu.
 - Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2 . Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2 . Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 , et ainsi de suite.
 - Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k , qu'il peut remporter avec la probabilité p , son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
 - Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.
- Pour tout entier naturel n , on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

On suppose que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

- 1) Déterminer les probabilités $P(E_1)$ et $P(E_2)$.
- 2) Soient $n \geq 3$ et $k \geq n - 1$. On note T_n l'événement « le joueur A_n gagne le duel n » et U_k l'événement « le joueur A_{n-1} gagne le duel k ».

Ecrire E_n à l'aide des événements E_{n-1} , E_{n-2} , T_n et d'événements U_k .
- 3) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

- 4) Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

EXERCICE 2 – UNE SÉRIE DE FONCTIONS

On s'intéresse aux fonctions $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le système

$$(S) \quad \begin{cases} \forall x > 0, & y(x+1) + y(x) = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que, si f et g sont deux solutions du système (S), alors la fonction $f - g$ est 2-périodique et en déduire que $f = g$.

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- 2) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .
3) La convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est-elle normale sur \mathbb{R}_+^* ?
4) Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est uniforme sur \mathbb{R}_+^* .

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- 5) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
6) Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et qu'elle est décroissante.
7) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$
8) Déterminer un équivalent de f en 0.
9) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
10) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ converge si, et seulement si, le réel x est strictement positif.

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

- 11) Montrer que la fonction g est décroissante.
12) Montrer que la fonction g est une solution du système (S). Qu'en déduire ?

PROBLÈME – LES POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

Partie A - étude d'un endomorphisme

Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par

$$\varphi(P) = XP' - (1 - X^2)P''$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3) Déterminer le spectre de l'endomorphisme φ .
- 4) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? est-il bijectif ?
- 5) Dans cette question, on pose $n = 2$.
Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ .

Partie B - les polynômes de Tchebychev

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par

$$T_0 = 1 \quad , \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

- 6) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le degré du polynôme T_n est n et le coefficient du terme dominant de T_n est 2^{n-1} .
- 7) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

- 8) Soit $n \geq 2$. On pose, pour chaque entier naturel k ,

$$a_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$

Montrer que les réels a_0, \dots, a_{n-1} sont distincts deux à deux. En déduire que le polynôme T_n possède n racines réelles distinctes deux à deux, appartenant à l'intervalle $[-1, +1]$.

Partie C - vecteurs propres

Soit $n \in \mathbb{N}$. On recherche les vecteurs propres de l'endomorphisme φ .

- 9) Montrer que, pour tout réel $x \in [-1, +1]$, $T_n(x) = \cos(n \cdot \text{Arccos}(x))$.
- 10) En déduire que, pour tout $x \in]-1, +1[$,

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \quad (\mathcal{E}_n)$$

- 11) Montrer que l'équation (\mathcal{E}_n) est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 12) Montrer que T_n est un vecteur propre de φ ; à quelle valeur propre est-il associé ?

Partie D - un produit scalaire

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

13) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est convergente.

14) En déduire, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, la convergence de l'intégrale $\langle P | Q \rangle$.

15) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

16) On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta$ et en déduire $\|T_n\|$.

17) Montrer que, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle \varphi(P) | Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2} dx$.

18) Comparer $\langle \varphi(P) | Q \rangle$ et $\langle \varphi(Q) | P \rangle$ pour tous polynômes P et Q .

19) Montrer que (T_0, T_1, \dots, T_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.