D.S. n° 5 de mathématiques

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 – probabilités

Définitions et notations

— Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

— On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

  — A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel 1. Le perdant est éliminé du tournoi et le gagnant reste en jeu.

  — Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3, et ainsi de suite.

  — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec la probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.

  — Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

— Pour tout entier naturel n, on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

On suppose que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1) Déterminer les probabilités $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

2) Soient $n \geq 3$ et $k \geq n-1$. On note T_n l'événement « le joueur A_n gagne le duel n » et U_k l'événement « le joueur A_{n-1} gagne le duel k ».

Ecrire E_n à l'aide des événements E_{n-1}, E_{n-2}, T_n et d'événements U_k.

3) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4) Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

Exercice 2 – une série de fonctions

On s'intéresse aux fonctions $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant le système

$$(S) \qquad \begin{cases} \forall x > 0, \quad y(x+1) + y(x) = \frac{1}{x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que, si f et g sont deux solutions du système (S), alors la fonction $f - g$ est 2-périodique et en déduire que $f = g$.

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) La convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est-elle normale sur $\mathbb{R}_+^*$?

4) Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

5) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

6) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est décroissante.

7) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) + f(x) = \dfrac{1}{x}$

8) Déterminer un équivalent de f en 0.

9) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

10) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$ converge si, et seulement si, le réel x est strictement positif.

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$.

11) Montrer que la fonction g est décroissante.

12) Montrer que la fonction g est une solution du système (S).

13) En déduire la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et déterminer un équivalent du reste $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Problème – les polynômes de Tchebychev

Partie A - les polynômes de Tchebychev

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par

$$T_0 = 1 \quad , \quad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le degré du polynôme T_n est n et le coefficient du terme dominant de T_n est 2^{n-1}.

2) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

3) Soit $n \geq 2$. On pose, pour chaque entier naturel k,

$$a_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$

Montrer que les réels $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux. Déterminer les racines du polynôme T_n.

Partie B - vecteurs propres

Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par

$$\varphi(P) = XP' - (1 - X^2)P''$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

4) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) Montrer que, pour tout réel $x \in [-1, +1]$, $T_n(x) = \cos(n \cdot \operatorname{Arccos}(x))$.

6) En déduire que, pour tout $x \in]-1, +1[$,

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \qquad\qquad (\mathcal{E}_n)$$

7) Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8) En déduire que T_n est un vecteur propre de φ.

9) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

Partie C - un produit scalaire

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

10) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ est convergente.

11) En déduire, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, la convergence de l'intégrale $\langle P \mid Q\rangle$.

12) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

13) On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\,d\theta$ et en déduire $\|T_n\|$.

14) Montrer que, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle \varphi(P) \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$.

15) Comparer $\langle \varphi(P) \mid Q \rangle$ et $\langle \varphi(Q) \mid P \rangle$ pour tous polynômes P et Q.

16) Montrer que $(T_0, T_1, \cdots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie D - une méthode de quadrature

Soit $n \geq 2$. On cherche $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P(a_k) \qquad (*)$$

où les réels a_k ont été définis à la question 3.

17) Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note b_k le réel $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ qu'on ne cherchera pas à calculer.

Montrer qu'une $n-$liste $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$ vérifie la propriété $(*)$ si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-2}^2 & a_{n-1}^2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-2}^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

18) Rappeler le déterminant de la matrice carrée apparue dans la question précédente. En déduire qu'il existe une unique $n-$liste $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$ vérifiant la propriété $(*)$.

19) En effectuant une division euclidienne par le polynôme T_n, montrer que la propriété $(*)$ est vraie pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Partie E - une autre expression des polynômes de Tchebychev

20) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta).$$

21) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \geq 1$,

$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$