Corrigé du D.S. n° 5 de mathématiques

Durée : 4 heures.

Exercice 1 – probabilités (extrait de Ecricome - ECS - 2014)

1) E_1 et E_2 sont des événements certains, donc $\boxed{P(E_1) = P(E_2) = 1}$.

2) Soit $n \geq 3$. Notons : G_n l'événement « il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro n et le vainqueur du duel numéro n est le joueur A_n (et marque donc au duel n sa première victoire) » et H_n l'événement « il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro n et le vainqueur du duel numéro n est le joueur A_{n-1} (et marque donc au duel n sa seconde victoire) ».

Alors $\boxed{E_n = G_n \cup H_n. \text{ D'une part, } G_n = E_{n-1} \cap T_n. \text{ D'autre part, } H_n = E_{n-2} \cap U_{n-1} \cap U_n}$.

3) D'après la formule des probabilités composées, $P(G_n) = P(E_{n-1})P(T_n|E_{n-1}) = \frac{1}{2}P(E_{n-1})$ et $P(H_n) = P(E_{n-2})P(U_{n-1}|E_{n-2})P(U_n|E_{n-2} \cap U_{n-1}) = \frac{1}{4}P(E_{n-2})$.

L'union $E_n = G_n \cup H_n$ est disjointe, d'où $P(E_n) = P(G_n) + P(H_n)$. Donc $\boxed{P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2})}$.

4) La suite $(P(E_n))_{n\geq 1}$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2, et a pour équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$, donc les deux solutions distinctes sont $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
Il existe donc deux constantes réelles λ et μ telles que : $\forall n \geq 1,\ P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
Pour tout $n \geq 1$, si E_{n+1} est réalisé, alors le gagnant n'a pas été désigné non plus à l'issue des duels précédents. L'événement E_n est donc nécessairement réalisé. Ainsi $E_{n+1} \subset E_n$. La suite (E_n) étant décroissante, $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = 0$ par continuité décroissante. Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, la suite $P(E_n)$ tend vers 0. D'où $\boxed{P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0, \text{ donc « le tournoi désignera un vainqueur » est presque certain}}$ car l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » est le contraire de l'événement « on ne désignera jamais de gagnant au tournoi ».

Exercice 2 – une série de fonctions (extrait de Centrale TSI 2011)

1) Pour tout $x > 0$, $f(x+1) - g(x+1) = (\frac{1}{x} - f(x)) - (\frac{1}{x} - g(x)) = -(f(x) - g(x))$, d'où $f(x+2) - g(x+2) = -(f(x+1) - g(x+1)) = f(x) - g(x)$, donc $\boxed{f - g \text{ est 2-périodique}}$.

De plus, les fonctions f et g tendent vers 0, donc $\lim\limits_{+\infty}(f-g)=0$. Soit alors $x\in\mathbb{R}_+^*$ fixé. La fonction $h=f-g$ est 2-périodique, d'où, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $h(x)=h(x+2n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. D'où $h(x)=0$ et, le choix de x étant arbitraire dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, i.e. $f=g$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\boxed{\text{la solution de } (S) \text{ est unique, si elle existe}}$.

2) Soit $x>0$: la suite $\left(\frac{1}{x+k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, donc la série numérique $\sum f_k(x)$ converge, d'après le théorème des séries alternées. Donc $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_k \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+^*}$.

3) Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*}|f_n(x)|=\frac{1}{n}$, or la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Toujours d'après le théorème des séries alternées, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on peut majorer la valeur absolue du reste $R_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k(x)$:

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{x+n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}$$

qui est un majorant. Donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*}|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}$ car le sup est le plus petit majorant. Or $\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, d'où $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*}|R_n(x)|$ tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes. Le reste de la série de fonctions converge uniformément vers 0, donc $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_k \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+^*}$.

5) On utilise le théorème de la double limite : pour chaque $k\in\mathbb{N}$, $f_k(x)=\frac{(-1)^k}{x+k}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et la série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}0=0}$.

6) Soit $a>0$:

— pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et $f_k'(x)=\frac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^2}$ pour tout $x\geq a$;

— la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[a,+\infty[$ d'après la question 2 ;

— pour tout $x\geq a$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $|f_k'(x)|\leq\frac{1}{(a+k)^2}$ et la série numérique $\sum\frac{1}{(a+k)^2}$ converge car $\frac{1}{(a+k)^2}\underset{k\to\infty}{\sim}\frac{1}{k^2}$ qui ne change pas de signe. Donc la série de fonctions $\sum f_k'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$. Et ce, pour tout $a>0$.

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$ et, pour tout $x>0$, $f'(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^2}$ est du même que signe que le premier terme, donc négatif. Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est décroissante}}$.

7) Soient $x > 0$, $N \in \mathbb{N}$ et $S_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(x+k)}$. Alors $S_N(x+1) = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)} = \sum\limits_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)}$. D'où $S_N(x) + S_N(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{(-1)^N}{x+N+1}$. Cette égalité passe à la limite $N \to \infty$ car la série numérique $\sum f_k(x)$ converge d'après la question 2, donc $\boxed{f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x} \text{ pour tout } x > 0}$.

8) $f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1)$. Or $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x+1) = f(1)$ car f est continue en 1 d'après la question 6. D'où $f(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $\boxed{f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}}$.

9) La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 6, d'où, pour tout $x > 0$,

$$2f(x+1) \leq f(x+1) + f(x) \leq 2f(x).$$

Or $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$. Donc $f(x) \geq \frac{1}{2x}$. Et $f(x+1) \leq \frac{1}{2x}$. D'où $\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leq \frac{1}{2x-2}$ pour tout $x > 1$. En multipliant par $2x$ qui est positif, on obtient l'encadrement $1 \leq 2xf(x) \leq \frac{2x}{2x-2}$ puis, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2xf(x) = 1$. On en déduit que $\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$.

10) L'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$ est impropre en 0 si, et seulement si, $x - 1 < 0$. De plus $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t \to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ qui ne change pas de signe au voisinage de 0. Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt$ converge si, et seulement si, $1 - x < 1$ d'après le critère de Riemann en 0. Donc $\boxed{\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt \text{ converge si, et seulement si, le réel } x \text{ est strictement positif}}$.

11) Si $0 < x \leq y$ et $t \in]0, 1]$, alors $\frac{t^x}{1+t} \geq \frac{t^y}{1+t}$ ce qui implique, en utilisant la croissance de l'intégrale, que $g(x) \geq g(y)$. $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

12) D'une part, pour tout $x > 0$, $g(x+1) + g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(t+1)}{1+t}\, dt = \int_0^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x}$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt \leq \int_0^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x}$. Donc $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est une solution du système } (S)}$.

13) Or la fonction f est aussi une solution du système (S) d'après les questions 5 et 7. Donc $f = g$ d'après la question 1. En particulier, si $x = 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = g(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$, donc $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$: $f(N+2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+N+2} \overset{n=k+N+1}{=} \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-N-1}}{n+1} = (-1)^{N+1} \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Donc, $\boxed{\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = (-1)^{N+1} f(N+2) \underset{N \to \infty}{\sim} \frac{(-1)^{N+1}}{2N}}$ d'après l'équivalent de la question 9.

Problème

Partie A - les polynômes de Tchebychev

1) Par récurrence, on prouve, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété P_n : « le polynôme T_n a pour degré n et le coefficient de son terme dominant est 2^{n-1} ».
La propriété P_1 est vraie car $T_1 = X$ a pour degré 1 et le coefficient de son terme dominant est 2^0. Et P_2 est vraie car $T_2 = 2X^2 - 1$ a pour degré 2 et le coefficient de son terme dominant est 2^1.
Si P_n et P_{n+1} sont vraies, alors P_{n+2} est vraie car $T_{n+2} = 2X \cdot (2^n X^{n+1} + \cdots) - (2^{n-1}X^n + \cdots)$ a pour degré $n+2$ et le coefficient de son terme dominant est 2^{n+1}.
Donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Par récurrence, on prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 car $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\theta)$ et $T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1\theta)$.
Si la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, alors elle est vraie au rang $n+2$ car $T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta$. Or $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$ pour tous réels a et b, et en particulier pour $a = (n+1)\theta$ et $b = \theta$. D'où $T_{n+2}(\cos\theta) = \cos(n+2)\theta$.
La propriété est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit $n \geq 2$. Pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, $\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$ appartient à l'intervalle $[0, \pi]$. Or la fonction cos est strictement décroissante sur cet intervalle, donc elle y est injective. Par suite les n réels $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux. D'après la question 2, ce sont des racines de T_n car $T_n(a_k) = \cos\left[n \cdot (\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n})\right] = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Partie B - vecteurs propres

4) D'une part, φ est linéaire car, pour tous α, β dans $\mathbb{R}$ et P, Q dans $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta Q) &= X(\alpha P' + \beta Q') - (1 - X^2)(\alpha P'' + \beta Q'') \\ &= \alpha\left[XP' - (1-X^2)P''\right] + \beta\left[XQ' - (1-X^2)Q''\right] \\ &= \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q). \end{aligned}$$

D'autre part, pour chaque $k \geq 2$, $\varphi(X^k) = XkX^{k-1} - (1-X^2)k(k-1)X^{k-2} = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$.
De plus $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(X) = X$. Par suite, $\forall k \leq n,\ \varphi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. D'où $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.
Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) Soit $x \in [-1, +1]$: posons $\theta = \text{Arccos}(x)$. Alors $\cos\theta = x$ et, d'après la question 2,

$$T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = \cos(n \cdot \text{Arccos}(x)).$$

6) La fonction Arccos est dérivable sur $]-1, +1[$ et, pour tout $x \in]-1, +1[$, $\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
D'où $T_n'(x) = \dfrac{d}{dx}\cos(n \cdot \text{Arccos}(x)) = -\sin(n \cdot \text{Arccos}(x))\dfrac{-n}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$$\begin{aligned} T_n''(x) &= \frac{d}{dx}\sin(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cdot \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} + \sin(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cdot \frac{d}{dx}\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\cos(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cdot \frac{n^2}{1-x^2} + \sin(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cdot \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}^3} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in]-1, +1[$,

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \qquad (\mathcal{E}_n)$$

7) De la question précédente, il résulte que tous les réels de $]-1,+1[$ sont des racines du polynôme $(1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n$. Ce polynôme est donc nul car il possède une infinité de racines. Donc l'équation $(\mathcal{E}_n)$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8) On vient de montrer que $(1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0$. D'où $XT_n' - (1-X^2)T_n'' = n^2T_n$, autrement dit : $\varphi(T_n) = n^2T_n$. Le polynôme T_n n'étant pas nul, c'est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre n^2.

9) Le spectre de φ est $\left\{k^2, k \in [\![0,n]\!]\right\}$. Son cardinal est $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, donc

$\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable}}$. De plus $0 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$, donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas bijectif}}$.

Partie C - un produit scalaire

10) L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ est convergente si, et seulement si, les deux intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ le sont.

Première méthode. Soit $a \in [0,1[$: $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\mathrm{Arcsin}(x)]_0^a = \mathrm{Arcsin}(a) \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. D'où la première intégrale est convergente et, de même, la deuxième.

Deuxième méthode : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ converge d'après le critère de Riemann en 0 (avec $\alpha = \frac{1}{2}$). D'où la première intégrale est convergente et, de même, la deuxième.

11) La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)$ est continue sur le segment $[-1,+1]$, elle y est donc bornée. Par suite, il existe un réel M tel que : $\forall x \in [-1,+1],\ [P(x)Q(x)| \leq M$. D'où $\left|\dfrac{P(xQ(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leq M \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,+1[$. D'après la question précédente, l'intégrale $\langle P \mid Q\rangle$ est donc absolument convergente.

12) On veut montrer que la forme $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire, symétrique, définie positive :

$\boxed{\text{S}}$ $\langle P \mid Q\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{Q(x)P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \langle Q \mid P\rangle$

$\boxed{\text{B}}$ $\langle \alpha P + \beta Q | R\rangle = \alpha\langle P|R\rangle + \beta\langle Q|R\rangle$ par linéarité de l'intégrale. D'où la linéarité à gauche de $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et la bilinéarité par symétrie.

$\boxed{\text{P}}$ $\langle P|P\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \geq 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive.

$\boxed{\text{D}}$ Supposons que $\langle P|P\rangle = 0$. Alors $\int_{-1}^{+1} \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$. Or la fonction $x \mapsto \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est positive et continue, d'où $\forall x \in]-1,+1[, P(x) = 0$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ce qui prouve que $P = 0$.

13) On linéarise : si $n \neq 0$, alors $\cos^2(n\theta) = \dfrac{1+\cos(2n\theta)}{2}$, d'où $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2n\theta)}{2n}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

Et , si $n = 0$, alors $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(n\theta)\,d\theta = \int_0^\pi 1\,d\theta = \pi$.

Or $\|T_n\| = \sqrt{\langle T_n | T_n\rangle}$ et $\langle T_n|T_n\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Changeons de variable : $x = \cos\theta$. La fonction $\theta \mapsto \cos\theta$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\pi}^{0} \frac{T_n^2(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\,d\theta$ car $\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$ pour tout $\theta \in]0,\pi[$.

Donc $\|T_n\| = \sqrt{\pi/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$.

14) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle \varphi(P) \mid Q\rangle = \int_{-1}^{+1} \left[xP'(x) - (1-x^2)P''(x)\right] Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} u'(x)v(x)\,dx,$$

où les deux fonctions $u : x \mapsto -P'(x)\sqrt{1-x^2}$ et $v : x \mapsto Q(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+1[$. D'où, en intégrant par parties :

$$\langle \varphi(P) \mid Q\rangle = [u(x)v(x)]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} u(x)v'(x)\,dx = 0 + \int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

15) On a montré que, pour tous P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle \varphi(P) \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$. Par suite $\langle \varphi(Q) \mid P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{+1} Q'(x)P'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$ est égal à $\langle \varphi(P) \mid Q\rangle$.

16) Si $m \neq n$, alors les polynômes T_m et T_n sont des vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres distinctes m^2 et n^2 d'après la question 8. Or les réels $\langle \varphi(T_m) \mid T_n\rangle = m^2\langle T_m \mid T_n\rangle$ et $\langle \varphi(T_n) \mid T_m\rangle = n^2\langle T_n \mid T_m\rangle$ sont égaux d'après la question précédente. D'où le réel $\langle T_n \mid T_m\rangle$ est nul, donc $T_m \perp T_n$.

La famille de $n+1$ vecteurs $(T_0, T_1, \cdots, T_n)$ est orthogonale, aucun de ses vecteurs n'est nul, elle est donc libre et c'est une base car $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

Partie D - une méthode de quadrature

17) Les deux applications $f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ et $g : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j P(a_j)$ sont linéaires. D'où :

$$\begin{aligned}
\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ g(P) = f(P) \quad &\iff \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ g(X^i) = f(X^i) \text{ car } (1, \cdots, X^{n-1}) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\
&\iff \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j a_j^i = b_i \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-2}^2 & a_{n-1}^2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-2}^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

18) Le déterminant de la matrice carrée est un déterminant de Vandermonde, égal à $\displaystyle\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)$. Il est non nul car les n réels $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux d'après la question 3. D'où la matrice carrée est inversible. Il existe donc une unique $n-$liste $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$ vérifiant la propriété $(*)$.

19) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$: la division euclidienne de P par T_n donne : $P = T_n Q + R$ et $\deg R < n$. D'où $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{-1}^{+1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \langle T_n|Q\rangle + \int_{-1}^{+1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Or le quotient Q est de degré inférieur à $n-1$ car $\deg T_n = n$ d'après la question 1. D'où $T_n \perp Q$ d'après la question 16. Par suite $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j R(a_j)$ grâce à la propriété $(*)$ qui vaut pour le polynôme R car celui-ci est de degré strictement inférieur à n.

Enfin $R(a_i) = T_n(a_i)Q(a_i) + R(a_i) = P(a_i)$ pour chaque $i \in [\![0, n-1]\!]$ car les n réels $(a_0, \cdots, a_{n-1})$ sont des racines du polynôme T_n d'après la question 3.

Donc la propriété $(*)$ est vraie pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Partie E - une autre expression des polynômes de Tchebychev

20) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par récurrence, on prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$.

La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 car $T_0(\operatorname{ch}\theta) = 1 = \operatorname{ch}(0\theta)$ et $T_1(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}\theta = \operatorname{ch}(1\theta)$.

Si la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, alors elle est vraie au rang $n+2$ car $T_{n+2}(\operatorname{ch}\theta) = 2\operatorname{ch}\theta T_{n+1}(\operatorname{ch}\theta) - T_n(\operatorname{ch}\theta) = 2\operatorname{ch}\theta\operatorname{ch}(n+1)\theta - \operatorname{ch} n\theta$. Or $\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b) = 2\operatorname{ch} a\operatorname{ch} b$ pour tous réels a et b, et en particulier pour $a = (n+1)\theta$ et $b = \theta$. D'où $T_{n+2}(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n+2)\theta$.

La propriété est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.

21) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 1$: il existe un réel $\theta \geq 0$ tel que $\operatorname{ch}\theta = x$, d'où $T_n(x) = \operatorname{ch}(n\theta) = \frac{e^{n\theta}+e^{-n\theta}}{2} = \frac{\left(e^{\theta}\right)^n+\left(e^{-\theta}\right)^n}{2} = \frac{(\operatorname{ch}\theta+\operatorname{sh}\theta)^n+(\operatorname{ch}\theta-\operatorname{sh}\theta)^n}{2}$. De plus, $\operatorname{sh}\theta = \sqrt{\operatorname{ch}^2\theta - 1} = \sqrt{x^2-1}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \geq 1$,

$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$