D.S. N° 5 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème

Les calculatrices sont interdites.

13

EXERCICE 1 – PROBABILITÉS

Définitions et notations

— Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

— On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

  — A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel 1. Le perdant est éliminé du tournoi et le gagnant reste en jeu.

  — Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3, et ainsi de suite.

  — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec la probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.

  — Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

— Pour tout entier naturel n, on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

On suppose que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

0,5 **1)** Déterminer les probabilités $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

3 **2)** Soient $n \geq 3$ et $k \geq n-1$. On note T_n l'événement « le joueur A_n gagne le duel n » et U_k l'événement « le joueur A_{n-1} gagne le duel k ».
Ecrire E_n à l'aide des événements E_{n-1}, E_{n-2}, T_n et d'événements U_k.

$\bar{E}_n = (\bar{E}_{n-1} \cap T_n) \cup (\bar{E}_{n-2} \cap U_{n-1} \cap U_n)$

1 1 1

2,5 **3)** Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

$\cup$ disjointe 1

Proba. composées 0,5 + 1

7 **4)** Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

1 Éq. caractéristique 0,5 $\{r_1, r_2\}$

$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

0,5 1

$\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} \bar{E}_n$ $\quad E_{n+1} \subset E_n$

1 1

$P\left(\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = 0$ car $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.

1 1

21 Exercice 2 – une série de fonctions

On s'intéresse aux fonctions $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant le système

$$(S) \qquad \begin{cases} \forall x > 0, \quad y(x+1) + y(x) = \frac{1}{x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

3 **1)** Montrer que, si f et g sont deux solutions du système (S), alors la fonction $f - g$ est 2-périodique et en déduire que $f = g$. 1

$f - g = 0$ car ... 2

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1 **2)** Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

1 **3)** La convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est-elle normale sur $\mathbb{R}_+^*$?

2 **4)** Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x}$ 0,5 $\leq \frac{1}{n+1}$ 0,5

$\sup\limits_{x>0} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ car... 0,5

$\sup\limits_{x>0} |R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ 0,5

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1 **5)** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3 **6)** Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est décroissante.

f_k C^1 0,5 et $f'_k(x) = \dots$ 0,5
$\sum f_k$ CVS 0,5
$\sum f'_k$ CVU 0,5 car... 0,5
$f'(x) \leq 0$ car 0,5

0,5 **7)** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) + f(x) = \dfrac{1}{x}$

2,5 **8)** Déterminer un équivalent de f en 0. $f(x) \sim \frac{1}{x}$ 0,5 car f est C^0 en 1 1

3 **9)** Déterminer un équivalent de f en $+\infty$. $f(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ 1

1 **10)** Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ converge si, et seulement si, le réel x est strictement positif.

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$.

0,5 **11)** Montrer que la fonction g est décroissante.

2,5 **12)** Montrer que la fonction g est une solution du système (S). Qu'en déduire ?

$g(x+1) + g(x) = \frac{1}{x}$ 0,5

$g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ 1

$f = g$ 1

Problème – les polynômes de Tchebychev

7,5 **Partie A - étude d'un endomorphisme**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par

$$\varphi(P) = XP' - (1 - X^2)P''$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1 **1)** Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. 0,5 linéarité 0,5 stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$

2 **2)** Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1 **3)** Déterminer le spectre de l'endomorphisme φ.

1,5 **4)** L'endomorphisme φ est-il diagonalisable (1) ? est-il bijectif (0,5) ?

2 **5)** Dans cette question, on pose $n = 2$.
Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ. 0,5 X^0, 0,5 X^1, 1 $2X^2-1$

4 **Partie B - les polynômes de Tchebychev**

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par

$$T_0 = 1 \quad , \quad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1 **6)** Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le degré du polynôme T_n est n et le coefficient du terme dominant de T_n est 2^{n-1}. Initialisation 0,5 Hérédité 0,5

1,5 **7)** Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Initialisation 0,5
Trigo et hérédité 1

1,5 **8)** Soit $n \geq 2$. On pose, pour chaque entier naturel k,

$$a_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$

Montrer que les réels $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux (1). En déduire que le polynôme T_n possède (0,5) n racines réelles distinctes deux à deux, appartenant à l'intervalle $[-1, +1]$.

5,5 **Partie C - vecteurs propres**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On recherche les vecteurs propres de l'endomorphisme φ.

0,5 **9)** Montrer que, pour tout réel $x \in [-1, +1]$, $T_n(x) = \cos(n \cdot \mathrm{Arccos}(x))$.

1,5 **10)** En déduire que, pour tout $x \in]-1, +1[$,

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \qquad (\mathcal{E}_n)$$

2 **11)** Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1,5 **12)** Montrer que T_n est un vecteur propre de φ ; à quelle valeur propre est-il associé ?
0,5 $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ 0,5 $T_n \neq 0$ 0,5 $\varphi(T_n) = n^2 T_n$

12 **Partie D - un produit scalaire**

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

2 **13)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ est convergente.

1 **14)** En déduire, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, la convergence de l'intégrale $\langle P \mid Q \rangle$.

2 **15)** Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. SBP 0,5 D 1,5

2 **16)** On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\,d\theta$ et en déduire $\|T_n\|$.

2 **17)** Montrer que, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle \varphi(P) \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$.

0,5 **18)** Comparer $\langle \varphi(P) \mid Q \rangle$ et $\langle \varphi(Q) \mid P \rangle$ pour tous polynômes P et Q.

2,5 **19)** Montrer que $(T_0, T_1, \cdots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.