

D.S. N° 5 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème

Les calculatrices sont interdites.

13 EXERCICE 1 – PROBABILITÉS

Définitions et notations

- Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.
- On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :
 - A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel 1. Le perdant est éliminé du tournoi et le gagnant reste en jeu.
 - Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2 . Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2 . Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 , et ainsi de suite.
 - Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k , qu'il peut remporter avec la probabilité p , son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
 - Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.
- Pour tout entier naturel n , on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

On suppose que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

- 0,5 1) Déterminer les probabilités $P(E_1)$ et $P(E_2)$.
- 3 2) Soient $n \geq 3$ et $k \geq n - 1$. On note T_n l'événement « le joueur A_n gagne le duel n » et U_k l'événement « le joueur A_{n-1} gagne le duel k ».

Ecrire E_n à l'aide des événements E_{n-1} , E_{n-2} , T_n et d'événements U_k .

$$E_n = (E_{n-1} \cap T_n) \cup (E_{n-2} \cap U_{n-1} \cap U_n)$$

- 2,5 3) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

U disjointe 1
 Probas indépendantes 0,5 + 1

- 7 4) Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

1 Eq. caractéristique 0,5 $\{n_1, n_2\} = \{k, p\} \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, P(\bar{E}_n) = p^{n_1} + q^{n_2}$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n E_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{E}_i \quad P(\bar{E}_i) = \sum_{k=1}^i P(\bar{E}_i) = 0 \text{ car } k_1 < i \text{ et } k_2 < i.$$

24 EXERCICE 2 – UNE SÉRIE DE FONCTIONS

On s'intéresse aux fonctions $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le système

$$(S) \quad \begin{cases} \forall x > 0, & y(x+1) + y(x) = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

- 3) 1) Montrer que, si f et g sont deux solutions du système (S), alors la fonction $f - g$ est 2-périodique et en déduire que $f = g$. *$f-g=0$ car... 2*

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- 1) 2) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .
 1) 3) La convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est-elle normale sur \mathbb{R}_+^* ?
 2) 4) Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est uniforme sur \mathbb{R}_+^* .

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

*$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$ car 0,5
 $\sup_{x>0} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ car 0,5
 $\sup_{x>0} |R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car 0,5*

- 1) 5) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 3) 6) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et qu'elle est décroissante.
 0,5 7) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$.
 2,5 8) Déterminer un équivalent de f en 0. *$f(x) \sim \frac{1}{x}$ car... 1*
 3) 9) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
 1) 10) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ converge si, et seulement si, le réel x est strictement positif.

*$f \in C^1$ car 0,5 et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ car 0,5
 $\sum f_n$ CUV car 0,5
 $f'(x) \leq 0$ car 0,5*

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

- 0,5 11) Montrer que la fonction g est décroissante.
 1,5 12) Montrer que la fonction g est une solution du système (S).
 4) 13) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et déterminer un équivalent du reste $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

$f = g$ car 1 = 2 1

*$g(n+1) + g(n) = \frac{1}{n}$ car 0,5
 $g(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car 1
 $= (-1)^{N+1} f(N+2) \sim \frac{(-1)^{N+1}}{2N+1}$ car 1*

35

PROBLÈME – LES POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

4

Partie A - les polynômes de Tchebychev

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

- 1) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le degré du polynôme T_n est n et le coefficient du terme dominant de T_n est 2^{n-1} . *Initialisation 0,5 Hérité 0,5*
- 1,5) 2) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, *Initialisation 0,5 Trigo et hérité 1*

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$
- 1,5) 3) Soit $n \geq 2$. On pose, pour chaque entier naturel k ,

$$a_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$

Montrer que les réels a_0, \dots, a_{n-1} sont distincts deux à deux. Déterminer les racines du polynôme T_n . *1 0,5*

8

Partie B - vecteurs propres

Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par

$$\varphi(P) = XP' - (1 - X^2)P''$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- 1) 4) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. *Linéarité 0,5 Stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ 0,5*
- 0,5) 5) Montrer que, pour tout réel $x \in [-1, +1]$, $T_n(x) = \cos(n \cdot \text{Arccos}(x))$.
- 1,5) 6) En déduire que, pour tout $x \in]-1, +1[$,

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \quad (\mathcal{E}_n)$$
- 2) 7) Montrer que l'équation (\mathcal{E}_n) est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 1,5) 8) En déduire que T_n est un vecteur propre de φ . *$T_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $T_n \neq 0$ et $\varphi(T_n) = n^2 T_n$. 0,5*
- 1,5) 9) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable? Est-il bijectif? *1 0,5*

12

Partie C - un produit scalaire

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

- 2) 10) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est convergente. *impropre -1 et +1, car ni \int_0^1 et \int_{-1}^0 convergent 1 \int_0^1 car cos... 1*
- 1) 11) En déduire, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, la convergence de l'intégrale $\langle P | Q \rangle$.
- 2) 12) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. *SBP 0,5 > 1,5*
- 2) 13) On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta$ et en déduire $\|T_n\|$. *CDV 0,5 C^\pm et str. monotone 0,5*

$$= \frac{\pi}{2} \sin \neq 0 \quad 0,5$$

$$= \pi \text{ si } n = 0 \quad 0,5$$

2 14) Montrer que, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle \varphi(P) | Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2} dx$.

0,5 15) Comparer $\langle \varphi(P) | Q \rangle$ et $\langle \varphi(Q) | P \rangle$ pour tous polynômes P et Q .

2,5 16) Montrer que (T_0, T_1, \dots, T_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. orth. 2 base 0,5

7 Partie D - une méthode de quadrature

Soit $n \geq 2$. On cherche $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P(a_k) \quad (*)$$

où les réels a_k ont été définis à la question 3.

2 17) Pour chaque $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note b_k le réel $\int_{-1}^{+1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx$ qu'on ne cherchera pas à calculer.

Montrer qu'une n -liste $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ vérifie la propriété (*) si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_{n-2}^2 & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \dots & a_{n-2}^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2 18) Rappeler le déterminant de la matrice carrée apparue dans la question précédente. En déduire qu'il existe une unique n -liste $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ vérifiant la propriété (*).

3 19) En effectuant une division euclidienne par le polynôme T_n , montrer que la propriété (*) est vraie pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

4 Partie E - une autre expression des polynômes de Tchebychev

2 20) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\operatorname{ch} \theta) = \operatorname{ch}(n\theta).$$

Initialisation 0,5
Hérédité 0,5
Trigonométrique 1

2 21) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \geq 1$,

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}.$$