Exercices corrigés de mathématiques avec Python

pour préparer l'oral Math 2 de Centrale-Supélec

1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) : $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$ d'inconnue réelle $x \in [0, +\infty[$.

(a) Programmer une fonction `courbe(n)` qui reçoit un entier naturel n non nul et renvoie une représentation graphique de la fonction

$$f_n \;:\; x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$$

sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution sur $[0, +\infty[$.

(c) On note u_n cette solution. Programmer une fonction `suite(n)` qui reçoit un entier naturel n non nul et renvoie une valeur approchée par défaut à 10^{-5} près de chacun des réels $u_1, u_2, \cdots, u_n$. Que conjecturer ?

(d) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

(e) Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

SOLUTION

(a) Fichier oral-math-python-1.py

(b) Existence par le TVI : $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n - 1 \geq 0$; unicité par la stricte croissance de f_n sur $[0, +\infty[$.

(c) Fichier oral-math-python-1.py

(d) La suite (u_n) est minorée par zéro et elle est décroissante car
$u_{n+1}^{n+1} + (u_{n+1}^n - u_n^n) + \cdots (u_{n+1} - u_n) = 0$.
Elle est donc convergente.
De plus, $f_n(x) = \dfrac{x - x^{n+1}}{1 - x} - 1$, d'où $\boxed{2u_n - 1 = u_n^{n+1}}$ (*).
De plus, par décroissance de la suite, $0 \leq u_n \leq u_2 < 1$, d'où
$0 \leq u_n^{n+1} \leq u_2^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (gendarmes) $u_n^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'où $2\ell - 1 = 0$ en passant à la limite dans $(*)$, donc $\boxed{\ell = \frac{1}{2}}$.

(e) $\boxed{u_n - \frac{1}{2} \sim \dfrac{1}{2^{n+2}}}$ car $u_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}u_n^{n+1}$ d'après (*) et on va montrer que $u_n^{n+1} \sim \dfrac{1}{2^{n+1}}$, c'est-à-dire que $(2u_n)^{n+1}$ tend vers 1. C'est une forme indéterminée 1^∞ et $(2u_n)^{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)\ln(2u_n)}$.
Or $(n+1)\ln(2u_n)$ tend vers 0 car $2u_n = 1 + u_n^{n+1}$ d'après (*).
D'où $\ln(2u_n) = \ln(1 + u_n^{n+1}) \sim u_n^{n+1}$ car u_n^{n+1} tend vers 0.
Donc $(n+1)\ln(2u_n) \sim (n+1)u_n^{n+1}$ qui est inférieur à $(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ à partir d'un certain rang et, donc, tend vers 0 par croissances comparées.

2. Soit (a_n) la suite définie par

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2}\, a_n.$$

On s'intéresse à la série entière $\sum a_n x^n$.

(a) Programmer une fonction `suite(n)` qui reçoit un entier naturel $n \geq 2$ et renvoie une valeur approchée de chacun des réels $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Que conjecturer à propos de la série entière ?

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

(c) Représenter graphiquement sur l'intervalle $[0; +0,7]$ une solution approchée de l'équation différentielle

$$(1-x)y'(x) = (2x+1)y(x) \qquad (E)$$

vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

(d) Soit, pour tout $x \in]-R, +R[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

(e) Déterminer les solutions, sur $]-R, +R[$, de l'équation différentielle (E) et en déduire $f(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-R, +R[$.

Solution

(a) Fichier oral-math-python-2.py. On conjecture que $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ tend vers 1, ce qui impliquerait (d'Alembert) que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.

(b) Par récurrence, c'est vrai pour $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ et : si $1 \leq a_n \leq n^2$ et $1 \leq a_{n+1} \leq (n+1)^2$, alors $1 \leq a_{n+2} \leq (n+1)^2 + \dfrac{2}{n+2} n^2$ dont on vérifie qu'il est inférieur à $(n+2)^2$:
$(n+2)^2 - (n+1)^2 - \frac{2}{n+2} n^2 = \frac{7n+6}{n+2} \geq 0$.
$\boxed{R = 1}$ car $R \leq 1$ qui est le rayon de cv de $\sum x^n$ et $R \geq 1$ qui est le rayon de cv de $\sum n^2 x^n$.

(c) Fichier oral-math-python-2.py

(d)

$$\begin{aligned}(1-x)f'(x) - (2x+1)f(x) &= (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - (2x+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \underbrace{(a_1 - a_0)}_{x=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[(n+1)a_{n+1} - (n+1)a_n - 2a_{n-1}]}_{=0} x^n.\end{aligned}$$

(e) Sur l'intervalle $]-1, +1[$, l'équation différentielle (E) s'écrit $y'(x) = \frac{2x+1}{1-x} \cdot y(x)$. Une fonction y est une solution de (E) sur $]-1, +1[$ si, et seulement si, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1, +1[,\ y(x) = K \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot \dfrac{1}{(1-x)^3}$. De plus, $a_0 = 1 = f(0)$ est une C.I. qui fixe $K = 1$, donc $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \cdot \dfrac{1}{(1-x)^3}}$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

3. Soient a et b deux réels et $M(a,b)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & -a & 1 \\ 1-b & a & a-1 & -b \\ b & -a & 1-a & 1+b \\ 0 & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Écrire une fonction `matrice(a,b)` qui reçoit deux réels a et b et renvoie la matrice $M(a,b)$.

(b) En utilisant cette fonction, conjecturer le spectre et les sous-espaces propres de $M(1,2)$.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de (a,b) la matrice $M(a,b)$ est-elle diagonalisable ?

(d) Déterminer le polynôme mnimal de $M(1,2)$ et, plus généralement, le polynôme mnimal de $M(a,b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Solution

(a) Fichier oral-math-python-3.py.

(b) On conjecture que $\mathrm{Sp}(M(1,2)) = \{0;1\}$ et que $SEP(1) = \mathrm{Vect}((0,-1,1,0))$ et $SEP(0) = \mathrm{Vect}((1,-1,1,-1))$.

(c) On peut de même afficher le spectre de $M(a,b)$ pour d'autres valeurs de a et de b et conjecturer que : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Sp}(M(a,b)) = \{0;1\}$ et $\chi_{M(a,b)}(X) = X^2(X-1)^2$.
Prouvons-le : en remplaçant C_1 par $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ puis C_2 par $C_2 - C_1$, on obtient $\det(XI_4 - M(a,b)) = X^2 \cdot (X-1)^2$. D'où $\boxed{\mathrm{Sp}(M(a,b)) = \{0;1\}}$ et la matrice est diagonalisable *ssi* $\dim SEP(0) = 2 = \dim SEP(1)$:
— si $a \neq 0$, alors $SEP(0) = \mathrm{Vect}((1,-1,1,-1))$, d'où $M(a,b)$ n'est pas diagonalisable ;
— si $b \neq 0$, alors $SEP(1) = \mathrm{Vect}((0,-1,1,0))$, d'où $M(a,b)$ n'est pas diagonalisable ;
— si $a = 0$ et $b = 0$, alors $SEP(0) = \mathrm{Vect}((0,1,0,0),(1,-1,1,-1))$ et $SEP(1) = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(0,-1,1,0))$, d'où $M(a,b)$ est diagonalisable.

(d) Si $(a,b) = (0,0)$, alors la matrice $M(a,b)$ est diagonalisable et son spectre vaut $\{0;1\}$, donc $\boxed{\text{le polynôme minimal est } X(X-1) \text{ si } (a,b) = (0,0)}$. Sinon le polynôme minimal de $M(a,b)$:
— n'est pas scindé à racines simples (car la matrice n'est pas diagonalisable) ;
— a pour racines les valeurs propres 0 et 1 ;
— divise le polynôme caractéristique $X^2(X-1)^2$.
Ce polynôme minimal est donc $X(X-1)^2$ ou $X^2(X-1)$ ou $X^2(X-1)^2$. Dans le cas particulier où $(a,b) = (1,2)$, on peut exclure les deux premiers polynômes : fichier oral-math-python-3.py. Dans tous les cas où $(a,b) \neq (0,0)$:
— si $X(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$, alors $\mathrm{Ker}M(a,b)$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b) - I_4)^2$ sont supplémentaires d'après le lemme des noyaux. Or $\mathrm{Ker}M(a,b) = SEP(0)$ a pour dimension 1 et $\mathrm{Ker}(M(a,b) - I_4)^2 = SEC(0)$ a pour dimension $m_0 = 2$ par théorème. C'est absurde car la somme de ces dimensions ne vaut pas 4.
— de même, $X^2(X-1)$ n'est pas un polynôme annulateur.
Donc $\boxed{\text{le polynôme minimal est } X^2(X-1)^2 \text{ si } (a,b) \neq (0,0)}$.

4. Soient un entier $n > 0$ et deux réels a et b.

(a) Montrer que $f(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. et déterminer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Écrire une fonction `matrice(n,a,b)` qui reçoit l'entier n et les réels a et b, et renvoie la matrice M.

(c) En utilisant cette fonction, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f dans les deux cas suivants :

$$(n=2, a=1, b=0) \qquad et \qquad (n=2, a=1, b=-1).$$

(d) On suppose $a \neq b$. Déterminer, en fonction de (n,a,b), les valeurs et vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

SOLUTION

(a) L'application f est bien linéaire, le degré de $f(X^k)$ est inférieur a n pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $f(X^n)$ est aussi de degré inférieur à n.

$$M(n,a,b) = \begin{pmatrix} 0 & ab & & & & \\ 0-n & -(a+b) & 2ab & & & \\ & 1-n & -2(a+b) & 3ab & & \\ & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & nab \\ & & & & -1 & -n(a+b) \end{pmatrix}$$

(b) Fichier oral-math-python-4.py.

(c) En utilisant le fichier oral-math-python-4.py , si $n = 2$:

– et $a = 1$, $b = 0$, alors

$$f((X-1)^2) = 0,\ f((X-1)X) = -(X-1)X \text{ et } f(X^2) = -2X^2 \ ;$$

– et $a = 1$, $b = -1$, alors

$$f((X+1)^2) = -2(X+1)^2,\ f((X-1)(X+1)) = 0 \text{ et } f((X-1)^2) = 2(X-1)^2.$$

(d) $f((X-a)^\alpha (X-b)^\beta) = [(\alpha+\beta-n)X - (\alpha b + \beta a)]\,(X-a)^\alpha (X-b)^\beta$, d'où, pour chaque $\alpha \in [\![0,n]\!]$, $(X-a)^\alpha (X-b)^{n-\alpha}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $-\left[\alpha b + (n-\alpha)a\right]$. On suppose $a \neq b$ et on a donc obtenu $n+1$ valeurs propres distinctes deux à deux, donc l'endomorphisme est diagonalisable.

5.

(a) Vérifier que l'application φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$\varphi(P,Q) = P(1)\,Q(1) + P'(1)\,Q'(1) + P(2)\,Q(2) + P'(2)\,Q'(2)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Calculer le projeté orthogonal de X^3 sur le sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$ en résolvant un système linéaire avec Python.

Solution

(a) On vérifie que φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive. Pour le caractère défini : le seul polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ admettant 1 et 2 comme racines doubles est le polynôme nul.

(b) Le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est l'unique polynôme $a + b\,X + c\,X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $X^3 - (a + b\,X + c\,X^2)$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_2[X]$, c'est-à-dire orthogonal aux trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soient trois réels a, b et c :

$$p(X^3) = a + bX + cX^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(X^3 - p(X^3), 1) = 0 \\ \varphi(X^3 - p(X^3), X) = 0 \\ \varphi(X^3 - p(X^3), X^2) = 0 \end{array} \right.$$

Fichier oral-math-python-5.py. On résout le système linéaire avec Python et on trouve $\boxed{\frac{1}{10}\,(24 - 61\,X + 45\,X^2)}$ comme projeté orthogonal.

6. Soit n un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$ dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

Soit $\mathcal{SH}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{H}_n$.

(a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$.
Montrer que A appartient à $\mathcal{H}_n$ si, et seulement si, $A \cdot {}^tA = n\, I_n$.

(b) Déterminer les cardinaux de $\mathcal{H}_4$ et de $\mathcal{SH}_4$. (On pourra tester ce que fait la commande Python

```
[[x,y] for x in [0,1] for y in [0,1]]
```

et s'en inspirer.)

(c) Déterminer l'ensemble $\{\mathrm{Tr}(A), A \in \mathcal{SH}_4\}$. Justifier théoriquement ce résultat.

(d) Montrer que tous les éléments de $\mathcal{SH}_8$ ont une trace nulle.

Solution

(a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c̀oefficients dans $\{-1, 1\}$. Tous ses vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux et ont pour norme $\sqrt{n}$.
Donc A appartient à $\mathcal{H}_n$ si et seulement si $\frac{A}{\sqrt{n}}$ est orthogonale ce qui équivaut à $A \cdot {}^tA = nI_n$.

(b) Fichier oral-math-python-6.py. Le cardinal de $\mathcal{SH}_4$ est 64.

(c) Fichier oral-math-python-6.py. On constate que la trace de tout élément de $\mathcal{SH}_4$ appartient à $\{-4, 0, 4\}$.
En effet si M appartient à $\mathcal{SH}_4$, on a $M^2 = 4I_2$.
Donc les valeurs propres de M sont dans $\{-2, 2\}$. Si on note p et q les dimensions des sous-espaces propres $\mathrm{Tr}(M) = -2p + 2q = 2(q - p) = 2(2q - 4)$ or q est compris entre 0 et 4. Si $q = 0$, alors $M = -2I_4$ et si $q = 4$, alors $M = 2I_4$; dans ces deux cas, c'est absurde.

(d) Si M appartient à $\mathcal{SH}_8$, alors $M^2 = 8I_2$.
Les valeurs propres propres de M sont dans $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$. Si on note p et q les dimensions des sous-espaces propres, alors $\mathrm{Tr}(M) = -2\sqrt{2}p + 2\sqrt{2}q = 2\sqrt{2}(q - p) = 2\sqrt{2}(2q - 8)$. Si $2q - 8 \neq 0$, alors $\sqrt{2}$ est un rationnel ce qui est absurde. Donc $p = q = 4$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

7. On considère l'expérience aléatoire suivante : deux amis A et B se donnent rendez-vous entre 18h et 19h dans un café. On définit les variables aléatoires X et Y par : pour tout $(x, y) \in [\![0, 59]\!]^2, (X, Y) = (x, y)$ si A arrive entre 18 h x min et 18 h $(x+1)$ min et B arrive entre 18 h y min et 18 h $(y+1)$ min. On suppose que le couple (X, Y) suit une loi uniforme.

(a) Que mesure la variable aléatoire $T = |X - Y|$? Déterminer, pour chaque $k \in T(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$. Calculer une valeur (exacte ou approchée) de l'espérance $E(T)$ de T.

(b) Programmer une fonction `rdv(n)` qui reçoit un entier naturel non nul n et, en simulant n fois l'expérience aléatoire, renvoie la liste des n valeurs qu'a prises la variable aléatoire T.

(c) En utilisant la fonction `rdv(n)` pour différentes valeurs de n, proposer des valeurs approchées de l'espérance $E(T)$; commenter.

(d) En choisissant la valeur $n = 10^5$, utiliser la fonction `rdv(n)` pour calculer une valeur approchée de $P(T = k)$ pour chaque $k \in T(\Omega)$. Représenter sur un même graphique les lois de probabilité exacte et approchée.

Solution

(a) T mesure la durée pendant laquelle le premier arrivé attend le second. Dans le tableau suivant, les valeurs possibles de T sont équiprobables :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 2 & \cdots & 59 \\
1 & 0 & 1 & & 58 \\
2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\
59 & \cdots & & 1 & 0
\end{array}$$

d'où $\mathbb{P}(T = 0) = \dfrac{60}{60^2}$ et, pour tout $k \in [\![1, 59]\!]$,

$$P(T = k) = \frac{2(60 - k)}{60^2}.$$

$\mathbb{E}(T) = \dfrac{2}{60^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{59} k(60 - k) = \dfrac{59 \times 61}{60 \times 3}$ ou fichier oral-math-python-7.py.

(b) Fichier oral-math-python-7.py.

(c) Fichier oral-math-python-7.py. La valeur moyenne approche d'autant mieux l'espérance que n est grand. C'est ce qu'on constate et ce que suggère la loi faible des grands nombres.

(d) Fichier oral-math-python-7.py.

8. Ils sont n joueurs ($n \geq 2$) à jouer une partie à pile ou face en jetant chacun une pièce équilibrée. L'un d'entre eux gagne la partie si sa pièce donne un résultat différent des $n-1$ autres.

(a) On joue jusqu'à ce qu'apparaisse le premier gagnant ; soit X_n le nombre de parties alors jouées. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n ? Quelles sont l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_n ?

(b) Programmer une fonction `partie(n)` qui reçoit un entier $n \geq 2$ et, en simulant une partie à n joueurs, renvoie 1 si la partie est remportée par un gagnant, 0 sinon.

(c) Programmer une fonction `simuleX(n)` qui reçoit un entier $n \geq 2$ et simule la variable aléatoire X_n. En utilisant la fonction `simuleX(4)`, proposer une valeur approchée de l'espérance $\mathbb{E}(X_4)$.

Solution

(a) La probabilité que la partie soit remportée est $p_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$. La variable aléatoire X_n suit une loi géométrique de paramètre p_n.
$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{p_n}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \frac{1-p_n}{p_n^2}$.

(b) Fichier oral-math-python-8.py.

(c) Loi faible des grands nombres & Fichier oral-math-python-8.py

9. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique.

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement représentée par la matrice A.

(a) Déterminer le rang de la matrice A et montrer que le vecteur b n'appartient pas à $\mathrm{Im} f$.

(b) Déterminer le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}(f)$ et résoudre l'équation $\|f(x) - b\| = \inf_{y \in \mathbb{R}^3} \|f(y) - b\|$.

(c) Résoudre le système linéaire ${}^tAAx = {}^tAb$. Que constater ? Le prouver.

Solution

(a) Fichier oral-math-python-9.py.

(b) On résout le système linéaire qui traduit l'orthogonalité de $b - p(b)$ et de $\mathrm{Im} f$ en employant les vecteurs colonnes de A. Fichier oral-math-python-9.py.

Puis on résout l'équation $f(x) = p(b)$ où $p(b)$ est la projection précédente. Fichier oral-math-python-9.py.

(c) On retrouve la même solution. Voici pourquoi :

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}$ une matrice de rang p et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Ax$. Un vecteur x est une solution si, et seulement si, $f(x)$ est le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im} f$.

C'est encore équivalent à : pour tout y de $\mathbb{R}^p$, $(f(y) | f(x) - b) = 0$.

Équivalent à : pour tout y de $\mathbb{R}^p$, ${}^t(Ay)(Ax - b) = 0$. Équivalent à : pour tout y de $\mathbb{R}^p$, ${}^ty({}^tAAx - {}^tAb) = 0$.

Équivalent à : ${}^tAAx - {}^tAb = 0$.

Cette équation admet une unique solution car la matrice ${}^tAA \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{R})$ est inversible. En effet, son noyau est le même que celui de A donc est réduit au vecteur nul car A est de rang p.

10.

(a) Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & -16 & -6 \\ -11 & -1 & 3 \\ -13 & -20 & 24 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 40 & 8 & 16 \\ 40 & -2 & -4 \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

i. Préciser les éléments propres de A et de ${}^tB$.

ii. Soit $\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / A\,X = X\,B\}$.
La fonction Python suivante a pour argument `x` un tableau `numpy` de taille 9 :

```
def f(x):
    X=np.array(x)
    X=X.reshape((3,3))
    Y=A.dot(X)-X.dot(B)
    return Y.reshape(9)
```

En utilisant cette fonction, vérifier que $\mathcal{C}$ est une droite vectorielle dirigée par une matrice de la forme $U \cdot {}^tV$ où U et V sont deux vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on comparera aux vecteurs propres de la question précédente.

(b) Soit deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant au moins une valeur propre commune λ. Construire une matrice carrée M non nulle telle que $AM = MB$.

Solution

Cf l'exercice d'oral n° **19 RMS 2013 585, Mines Ponts PSI, RMS 2013 332, X ESPCI PC, RMS 2016 905 TPE PSI** .

(a) Fichier oral-math-python-10.py. On remarque que A et B ont une valeur propre commune 2.
La fonction `f` retourne la liste des coefficients de $AX - XB$, X étant la matrice 3×3 dont les coeffcients sont ceux de la liste `x`.
En utilisant la commande `root` du module `scipy`, la fonction précédente permet de déterminer une solution de l'équation $AX = XB$. On peut faire différents essais avec différentes conditions initiales. On obtient des matrices qui sont toutes colinéaires.

Donc $\mathcal{C}$ est engendré par $E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -5/2 & -1/2 & -1 \\ 5/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = U\,{}^tV$ avec

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si λ est une valeur propre de A et de B, alors c'est aussi une valeur propre de ${}^tB$, d'où :

$$\exists U \neq 0,\ AU = \lambda U \qquad \text{et} \qquad \exists V \neq 0,\ {}^tBV = \lambda V.$$

D'où ${}^tVB = \lambda {}^tV$ et, par suite, $AM = MB = \lambda M$ si on pose $M = U \cdot {}^tV$.

11. RMS 2016 843

(a) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe $\frac{(5+i)^4}{239+i}$.

(b) Prouver la formule de J. Machin (1706) : $4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$.

(c) Soit $x \in [0,1[$. Montrer que $|\arctan x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}| \leqslant x^{2n+3}$.

(d) Soit ε strictement positif. En déduire une méthode pour approcher π à la précision ε.

(e) Écrire un programme donnant une approximation de π à 10^{-15} près.

Solution

(a) Python donne directement le résultat, en validant `print((5 + 1j)**4/(239 + 1j))`. On obtient

$$\frac{(5+i)^4}{239+i} = 2 + 2i.$$

Sinon, on peut toujours développer le numérateur par la formule du binôme, puis multiplier par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{(5+i)^4}{239+i} &= \frac{625 + 4\times 125i + 6\times 25i^2 + 4\times 5i^3 + i^4}{239+i} \\ &= 4\frac{119+120i}{239+i} = \frac{4}{57122}(119+120i)(239-i) = \frac{2}{28561}(28561 + 28561i) = 2+2i.\end{aligned}$$

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$. Si $a > 0$, le nombre complexe z possède un argument dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donné par $\arctan(\frac{b}{a})$. En particulier, $\frac{\pi}{4}$ est un argument de $2+2i$. La question (a) et les règles de calcul des arguments modulo 2π prouvent alors que

$$\arg\left(\frac{(5+i)^4}{239+i}\right) \equiv 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \mod 2\pi.$$

L'inégalité $\arctan(x) \leqslant x$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, montre que $0 \leqslant 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) \leqslant \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}$. La congruence modulo 2π mentionnée ci-dessus est donc une égalité.

(c) On sait que (série géométrique) $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{2k}$. Or on peut intégrer terme à terme une série entière sans changer son de convergence, d'où : $\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$. Cette série vérifie les hypothèses du TSA, d'où

$$\forall x \in [0,1[, \quad \left|\arctan x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right| \leqslant x^{2n+3}.$$

(d) Si $\arctan(\frac{1}{5})$ et $\arctan(\frac{1}{239})$ sont approchés à la précision $\frac{\varepsilon}{20}$, alors $\pi = 16\arctan(\frac{1}{5}) - 4\arctan(\frac{1}{239})$ sera approché à la précision $(\frac{16}{20} + \frac{4}{20})\varepsilon = \varepsilon$. D'après la question précédente, il suffit de choisir n tel que $(\frac{1}{5})^{2n+3}$ et $(\frac{1}{239})^{2n+3}$ soient plus petits que $\frac{\varepsilon}{20}$, ce qui revient à la condition $(\frac{1}{5})^n \leqslant \frac{\varepsilon}{20}$, ou encore $2n+3 \geqslant \frac{\ln(20)-\ln(\varepsilon)}{\ln(5)}$.

(e) Fichier oral-math-python-11.py.

12. RMS 2016 783

On pose $\sigma(n) = \mathrm{Card}\{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ n = 2p + 3q\}$.

(a) Montrer que $\sigma(n)$ est un entier bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\sigma(0)$, $\sigma(1)$, $\sigma(2)$ et montrer que $\sigma(n) \geqslant 1$ pour $n \geqslant 3$.

(b) Écrire une fonction permettant de calculer $\sigma(n)$. Déterminer alors $\sigma(n)$ pour $n \in [\![0, 25]\!]$.

(c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \sigma(n)x^n$. Sur un intervalle I que l'on déterminera, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}$.

Solution

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par construction, si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est tel que $n = 2p + 3q$, on a $p \leqslant n/2$ et $q \leqslant n/3$. Donc $\{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ n = 2p+3q\}$ est une partie de $[\![0, n/2]\!] \times [\![0, n/3]\!] \cap \mathbb{N}^2$ donc un ensemble fini, son cardinal $\sigma(n)$ est donc un entier bien défini.

$\sigma(0) = 1$, $\sigma(1) = 0$ et $\sigma(2) = 1$. Pour tout $n \geqslant 3$, $\sigma(n) \geqslant 1$ car $\{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ n = 2p + 3q\}$ est non vide. En effet $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = pgcd(2,3)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ et q est défini modulo 2.

Autre méthode : si n est congru à 0 modulo 3 alors le couple $(0, n/3)$ est solution, si n est congru à 1 modulo 3 (donc supérieur ou égal à 4) alors $(2, (n-4)/3)$ est solution, enfin si n est congru à 2 modulo 3 le couple $(1, (n-2)/3)$ est solution.

(b) Fichier oral-math-python-12.py.

(c) Pour tout $n \geqslant 3$, on a $1 \leqslant \sigma(n) \leqslant n/2 + 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \sigma(n)x^n$ est donc minoré par celui de $\sum (n/2+1)x^n$ et majoré par celui de $\sum x^n$, qui valent tous deux 1, donc il vaut 1.

Pour tout $x \in I =]-1; 1[$, $\frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} = \sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p} \sum_{q=0}^{+\infty} x^{3p}$.

Par produit de Cauchy, $\dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{1-x^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{2p+3q=n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n$.

L'exercice 15 est le même, en plus compliqué.

13. RMS 2016 861

(a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. Calculer son espérance et déterminer une expression de sa fonction génératrice.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1,\dots,X_p$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $\{1,\dots,n\}$. On pose $S_p = X_1 + \cdots + X_p$. Déterminer la fonction génératrice de S_p.

(c) En déduire une fonction `proba(n,p)` qui renvoie la liste des réels $P(S_p = k)$ pour $k \in [\![0, \max S_p(\Omega)]\!]$.

(d) En simulant la variable aléatoire S_p, calculer une valeur approchée de $P(S_p = k)$ pour tout $k \in [\![0, \max S_p(\Omega)]\!]$.

(e) Représenter sur un même graphique les lois de probabilité exacte et approchée de la variable aléatoire S_p, dans le cas où $n = 20$ et $p = 10$.

Solution

(a) $E(X) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \dfrac{n+1}{2}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n t^k$, donc, si $t \neq 1$, alors $G_X(t) = \dfrac{t}{n}\dfrac{1-t^n}{1-t}$.

(b) Les variables aléatoires sommées étant indépendantes, la fonction génératrice de leur somme S_p est le produit des fonctions génératrices de $X_1, \dots, X_p$ (qui sont toutes égales) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_{S_p}(t) = \frac{1}{n^p}\left(\sum_{k=1}^n t^k\right)^p \quad \text{et si } t \neq 1, \quad G_{S_p}(t) = \frac{t^p}{n^p}\left(\frac{1-t^n}{1-t}\right)^p.$$

(c) Fichier oral-math-python-13.py. La fonction G_{S_p} est un polynôme. Pour tout k, $P(S_p = k)$ est le coefficient du monôme de degré k dans ce polynôme.

(d) Fichier oral-math-python-13.py.

(e) Fichier oral-math-python-13.py.

14. RMS 2016 781

(a) Montrer que le réel $A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Préciser les valeurs exactes de A_0 et A_1.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer A_{n+1} en fonction de $A_0, \dots, A_n$ et des coefficients du binôme. S'en servir pour calculer numériquement les valeurs de A_n/A_0 pour n allant de 0 à 12.

(c) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$ est définie au moins sur $]-1, +1[$. Représenter graphiquement f sur cet intervalle.

(d) Montrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle $y' = e^x y$. En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

Solution

(a) Par la formule de Stirling

$$\frac{k^{n+2}}{k!} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{k^{n+2-k}e^k}{\sqrt{2\pi k}} = e^{(n+2-k)\ln k + k - \frac{1}{2}\ln(2\pi k)}$$

et $(n+2-k)\ln k + k - \frac{1}{2}\ln(2\pi k) \sim -k\ln k \to -\infty$ quand $k \to +\infty$. Par suite $\frac{k^n}{k!} = o(\frac{1}{k^2})$, or $\frac{1}{k^2}$ ne change pas de signe, donc la série $\sum \frac{k^n}{k!}$ converge. De plus

$$A_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^0}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e,$$

$$A_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

(b) Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k^{n+1}}{k!} = \frac{k^n}{(k-1)!}$, donc

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^n}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\frac{k^j}{k!}.$$

Chacune des séries $\sum \frac{k^j}{k!}$ est convergente, donc

$$A_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^j}{k!} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A_j.$$

Fichier oral-math-python-12.py.

(c) On calcule les A_i/e, qui sont des entiers et vérifient les mêmes relations de récurrence : fichier oral-math-python-12.py.

(d) On étudie la série entière $\sum \frac{A_n}{n!}x^n$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété $A_n \leqslant n!e$.

— On a $A_0 = A_1 = e$ d'où $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k \leqslant n$. Alors $A_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j \leqslant \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j j!e = n!e\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n-j)!}$.
Comme $\frac{1}{(n-j)!} \leqslant 1$ pour tout $j \in [\![0; n]\!]$, il vient $A_{n+1} \leqslant n!e(n+1) = (n+1)!e$, d'où $\mathcal{P}(k+1)$, ce qui conclut la récurrence.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{A_n}{n!} \leqslant e$ donc la suite des coefficients de la série entière est bornée, donc son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$.

Pour tracer la courbe, on utilise la somme partielle d'ordre 12, donc les coefficients sont déjà calculés : fichier oral-math-python-12.py.

(e) On rappelle que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $A_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j$ donc $\frac{A_{n+1}}{n!} = \sum_{j=0}^{n}\frac{A_j}{j!}\cdot\frac{1}{(n-j)!}$. En multipliant par x^n, avec $x \in]-R, R[$ et en sommant, il vient $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{A_j}{j!}\cdot\frac{1}{(n-j)!}x^n$ d'où

$$f'(x) - A_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{A_j}{j!}\cdot\frac{1}{(n-j)!}x^n - A_0 = f(x)e^x - A_0.$$

Comme $A_0 = A_1$, il vient $f'(x) = e^x f(x)$.

La fonction f est donc de la forme $x \mapsto \lambda e^{e^x}$, avec $f(0) = A_0 = e = \lambda e$ donc $\lambda = 1$.

15. RMS 2016 784

Soit $f\colon x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)}$.

(a) Montrer que f est développable en série entière et minorer son rayon de convergence.

(b) On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ce développement en série entière. Écrire une fonction qui calcule c_n en prenant pour argument n. Calculer c_n pour $n \in [\![0,199]\!]$. Comparer c_n et c_{n+15} pour $n \in [\![0,184]\!]$.

(c) Montrer que $(1-X^{15})(1-X)$ est divisible par $(1-X^3)(1-X^5)$. On note Q le quotient de la division euclidienne du premier par le second. Quel est le degré de Q ? Que peut -on dire de $Q(1)$?

(d) Montrer que la fonction $x \mapsto (1-x^{15})f(x) - \frac{1}{1-x}$ est polynomiale sur $]-1,1[$. En déduire une relation entre c_n et c_{n+15} valable pour tout entier n.

(e) On pose $D_n = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2,\ 3a+5b = n\}$ et $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$. Trouver une relation entre d_n et c_n et retrouver la relation entre c_n et c_{n+15} obtenue en (d).

SOLUTION

(a) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ donc $\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n}$ et $\frac{1}{1-x^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{5n}$ donc $x \mapsto \frac{1}{1-x^3}$ et $x \mapsto \frac{1}{1-x^5}$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$. La fonction f l'est donc également par produit de Cauchy et le rayon de convergence de sa série entière est supérieur au minimum des deux rayons, donc supérieur à 1.

(b) Fichier oral-math-python-12.py.
Par produit de Cauchy, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ où a_k vaut 1 si k est multiple de 3 et 0 sinon, et $b_{n-k} = 1$ si $n-k$ est multiple de 5 et 0 sinon.

(c) Le polynôme $(1-X^3)(1-X^5)$ se factorise en

$$(1-X)^2 \prod_{\lambda \in \mathbb{U}_3 \setminus \{1\}} (\lambda - X) \prod_{\lambda \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}} (\lambda - X).$$

Or les racines cubiques de l'unité autres que 1 sont racines de $1 - X^{15}$, de même pour les racines cinquièmes de l'unité autre que 1. Enfin 1 est racine de $1-X^{15}$ et de $1-X$ donc racine double du produit.
Finalement, tout ceci prouve que $(1-X^{15})(1-X)$ est divisible par $(1-X^3)(1-X^5)$, et le quotient Q de la division euclidienne de $(1-X^{15})(1-X)$ par $(1-X^3)(1-X^5)$ est de degré $16-8=8$. Nécessairement $Q(1) \neq 0$ sinon 1 serait racine triple de $(1-X^{15})(1-X)$. Précisément, $Q(X) = \frac{(1-X^{15})(1-X)}{(1-X^5)(1-X^3)} = \frac{1+X^5+X^{10}}{1+X+X^2}$ donc

$$Q(1) = 1.$$

(d) Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1-x^{15})f(x) - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}\left[\frac{(1-x^{15})(1-x)}{(1-x^3)(1-x^5)} - 1\right] = \frac{1}{1-x}\left[Q(x) - 1\right].$$

Or $Q(1) = 1$ donc le polynôme $Q-1$ s'écrit $(X-1)R$ avec R un polynôme, donc pour tout $x \in]-1,1[$, $(1-x^{15})f(x) - \frac{1}{1-x} = R(x)$. Autrement dit, la fonction est polynomiale (de degré 7). Comme

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^{15})f(x) - \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=15}^{+\infty} c_{n-15} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = R(x),$$

il vient $\forall n \geq 15,\ c_n - c_{n-15} - 1 = 0$ par unicité du développement en série entière, donc $\forall n \in \mathbb{N},\quad c_{n+15} - c_n = 1$.

(e) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $a_k b_{n-k} = 1$ si n s'écrit $n = 3(k/3) + 5((n-k)/5)$ et $k/3 \in \mathbb{N}$ et $(n-k)/5 \in \mathbb{N}$. Et vaut 0 sinon. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = d_n.$$

Et l'on a bien $d_{n+15} = d_n + 1$ puisque : d'une part, si $n = 3a+5b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, alors $n+15 = 3(a+5)+5b$ et, réciproquement : si $n+15 = 3a+5b$ avec $a \geqslant 5$ et $b \in \mathbb{N}$ alors $n = 3(a-5)+5b$ donc d_n est exactement le nombre de façons d'écrire $n+15 = 3a+5b$ avec $a \geqslant 5$ et $b \in \mathbb{N}$. D'autre part, $n+15$ s'écrit de manière unique sous la forme $3a+5b$ avec $0 \leqslant a \leqslant 4$ et $b \in \mathbb{N}$ car $3\mathbb{Z}+5\mathbb{Z} = pgcd(3,5)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ et a est défini modulo 5.

16. UPS 20240514 Centrale MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une urne, n boules sont numérotées de 1 à n. À chaque fois qu'on tire une boule au hasard, on enlève les boules portant un numéro supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

(a) Simuler la variable aléatoire X_n avec une fonction `experience`(n) et évaluer $E(X_n)$ avec une fonction `moyenne`(n) en répétant $100n$ fois l'expérience aléatoire. Représenter graphiquement `moyenne`(n) en fonction de n.

(b) Déterminer les loi, espérance et variance de X_2 et de X_3.

(c) Préciser $X_n(\Omega)$. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

(d) Montrer que $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=k}^{n} P(X_{i-1} = k-1)$ pour tout $n \geq k \geq 2$.

(e) En déduire que $E(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)$. Déterminer un équivalent de $E(X_n)$ quand $n \to \infty$.

Solution

(a) Fichier oral-math-python-16.py.

(b) $X_2(\Omega) = \{1; 2\}$. L'événement $(X_2 = 1)$ est « la première boule tirée porte le numéro 1 », d'où $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et, par suite, $P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$. Enfin $E(X_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
$X_3(\Omega) = \{1; 2; 3\}$. L'événement $(X_3 = 1)$ est « la première boule tirée porte le numéro 1 », d'où $P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$. L'événement $(X_3 = 3)$ est « on tire successivement les boules 3, 2 et 1 », d'où $P(X_3 = 3) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ et, par suite, $P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = \frac{1}{2}$. Enfin $E(X_3) = \frac{11}{6}$ et $V(X_3) = 2$.

(c) $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$. L'événement $(X_n = 1)$ est « la première boule tirée porte le numéro 1 », d'où $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$. L'événement $(X_n = n)$ est « on tire successivement les boules $n, n-1, \cdots, 1$ », d'où $P(X_3 = 3) = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots 1 = \frac{1}{n!}$ par la formule des probabilités composées.

(d) Soit $n \geq k \geq 2$. On conditionne par le numéro T_1 de la première boule tirée :
$P(X_n = k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(X_n = k | T_1 = j) P(T_1 = j)$ par la formule des probabilités totales. D'une part $P(T_1 = j) = \frac{1}{n}$ qui se met en facteur. D'autre part, pour tout $j \in [\![k, n]\!]$: si on sait que $T_1 = j$, alors tout se passe ensuite comme si on recommençait l'expérience avec $j - 1$ boules, d'où $P(X_n = k | T_1 = j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j < k \\ P(X_{j-1} = k-1) \text{ si } j \in [\![k, n]\!] \end{cases}$. Donc $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=k}^{n} P(X_{j-1} = k-1)$ pour tout $n \geq k \geq 2$.

(e) $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} k\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n} P(X_{j-1} = k-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}\underbrace{\sum_{k=2}^{j} kP(X_{j-1} = k-1)}_{E(X_{j-1})+1}$.

Donc $E(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=2}^{n} E(X_{j-1})$. Et, par récurrence : $E(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. Donc $E(X_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.