Exo 31 de la banque CCINP

Soit $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(E)\ y'' + y = \cos^3(x) \iff Y'(x) = A \cdot Y(x) + B(x)$$

en notant $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3 x \end{pmatrix}$.

$$(E_0)\ y'' + y = 0 \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$$

$$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},\ Y(x) = \lambda \Phi(x) + \mu \Psi(x)$$

en notant $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos' x \end{pmatrix}$ et $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin' x \end{pmatrix}$.

Pour résoudre (E), on fait varier les constantes en posant :

$$Y(x) = \lambda(x) \Phi(x) + \mu(x) \Psi(x) :$$

$$(E) \iff \cancel{\lambda(x)\Phi'(x) + \mu(x)\Psi'(x)} + \lambda'(x)\Phi(x) + \mu'(x)\Psi(x) = A \cdot \left(\cancel{\lambda(x)\Phi(x) + \mu(x)\Psi(x)}\right) + B(x)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 & L_1 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \cos^3 x & L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda'(x) = -\sin x \cdot \cos^3 x & \cos x\, L_1 - \sin x\, L_2 \\ \mu'(x) = \cos^4 x & \sin x\, L_1 + \cos x\, L_2 \end{cases}$$

$$\iff \heartsuit \begin{cases} \lambda(x) = \frac{1}{4}\cos^4 x + K \\ \mu(x) = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + L \end{cases}$$

Donc y est une sol. sur $\mathbb{R}$ de (E) ssi il existe $(K, L) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\heartsuit$.