Chapitre II Algèbre linéaire

Table des matières

II.1 Matrices semblables, trace et déterminant

Se rappeler d'abord les **formules de passage** : soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

— si $X = [x]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ et $X' = [x]_{\mathcal{B}'}$ la matrice colonne des coordonnées du même vecteur x dans la base $\mathcal{B}'$, alors

$$\boxed{X = P\,X'}$$

— si $A = [u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est la matrice carrée d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $A' = [u]_{\mathcal{B}'}$ la matrice carrée du même endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}'$, alors

$$\boxed{A' = P^{-1}\,A\,P}$$

On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}\,A\,P$. Autrement dit, deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme dans deux bases.

Exercice 1 — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une matrice inversible P (quelle est cette matrice ? est-elle unique ?) telle que*

$$P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se rappeler que la **trace** et le **déterminant** d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ sont définis par

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{et} \quad \det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}.$$

La trace est linéaire : $\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{tr}\,A + \beta\,\mathrm{tr}\,B$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $A,\ B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Pas le déterminant : $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ et $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$. Mais le déterminant est multilinéaire (*i.e.* linéaire par rapport à chacune de ses colonnes) et antisymétrique (il change de signe si on échange deux colonnes).

Soient A et B deux matrices carrées :

$$\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A) \quad \text{et} \quad \det(A^T) = \det(A),$$

$$\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \qquad \text{et} \qquad \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(BA)}$$

Par suite, deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant : la matrice d'un endomorphisme u change quand on change de base (A devient $A' = P^{-1}\,A\,P$) mais ni la trace ni le déterminant de cette matrice ne changent : $\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} A$ et $\det A' = \det A$. (On dit que la trace et le déterminant sont des **invariants de similitude**.)

On peut donc parler de la trace ou du déterminant d'un endomorphisme u, sans préciser dans quelle base :

$$\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}([u]_{\mathcal{B}}) \qquad \text{et} \qquad \det(u) = \det([u]_{\mathcal{B}})$$

ne dépendent pas de la base $\mathcal{B}$. De plus :

$$\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u) \qquad \text{et} \qquad \det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(v \circ u).$$

II.2 Noyau, image et rang

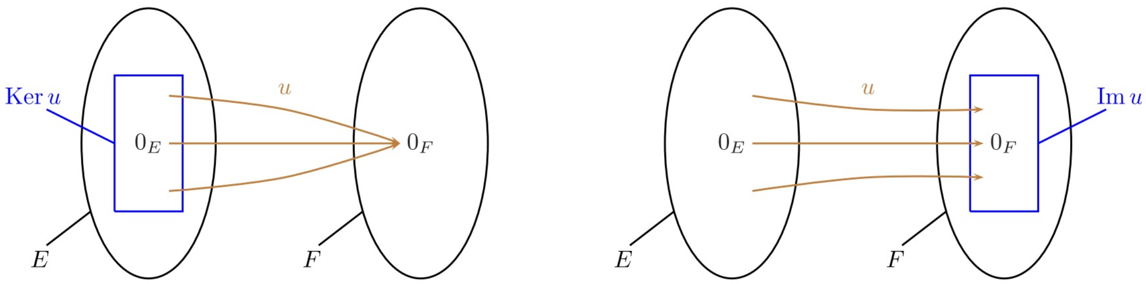

Figure II.1 – Noyau & image d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels, u une application linéaire de E vers F. Se rappeler que le **noyau** et l'**image** de u sont définis par :

$$\forall x \in E, \quad x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 0_F \qquad \text{et} \qquad \forall y \in F, \quad y \in \operatorname{Im} u \iff \exists x \in E,\ y = u(x).$$

Le noyau de u est un *sev* de E ; l'image de u est un *sev* de F et, plus généralement, l'image directe d'un *sev* de E est un *sev* de F.

$$u \text{ injectif} \iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\} \qquad \text{et} \qquad u \text{ surjectif} \iff \operatorname{Im} u = F.$$

Exercice 2 — *Montrer que tout supplémentaire du noyau* $\operatorname{Ker} u$ *d'un endomorphisme* u *est isomorphe à l'image* $\operatorname{Im} u$*.*

Si E est de dimension finie, il en résulte le **théorème du rang** :

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u) + \underbrace{\dim \operatorname{Im}(u)}_{=\operatorname{rg}(u) \text{ par déf}}}$$

Et son corollaire dans le cas où $\dim E = \dim F$ (*a fortiori* dans le cas où u est un endomorphisme) :

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif} \iff \det(u) \neq 0.$$

REMARQUE 3 — *Le théorème du rang ne dit pas que noyau et image sont toujours supplémentaires : penser à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4 — Se rappeler qu'une **forme linéaire** est une application linéaire d'un $\mathbb{K}-ev$ E vers $\mathbb{K}$.

1. *Montrer qu'une forme linéaire est, ou bien nulle, ou bien surjective.*

Se rappeler que le noyau $\operatorname{Ker} u$ d'une forme linéaire u non nulle est appelé un **hyperplan**.

Soit E un ev *de dimension n. Montrer que :*

2. *tout hyperplan de E est un* sev *de dimension $n-1$;*
3. *réciproquement, tout* sev *de dimension $n-1$ de E est un hyperplan.*

La trace $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle.

4. *Déterminer une base de l'hyperplan* $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$.

II.3 Intersection, produit et somme de *sev*

EXERCICE 5 — *Soit E un* ev.

1. *Montrer qu'une intersection de* sev *de E est encore un* sev *de E.*
2. *Montrer que la réunion de deux* sev *n'est pas toujours un* sev.
3. *Plus précisément : montrer que la réunion de deux* sev *est encore un* sev *si, et seulement si, l'un des deux* sev *est inclus dans l'autre.*
4. *Montrer que le produit $F_1 \times \cdots \times F_r = \prod_{i=1}^{r} F_i$ de r* sev *de E est un sev de E^r. Et que, si les* sev *F_i sont de dimensions finies, alors*

$$\dim \prod_{i=1}^{r} F_i = \sum_{i=1}^{r} \dim F_i.$$

DÉFINITION 6
Soient $F_1, \cdots, F_r$ des *sev* d'un $\mathbb{K}-ev$ E. On dit que :

1. une partie S de E est la **somme** des *sev* F_i si, pour tout $v \in E$,
$$v \in S \iff \exists (v_1, \ldots, v_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r,\ v = v_1 + \cdots + v_r\,;$$
2. cette somme est **directe** si
$$\forall v \in S,\ \exists! (v_1, \ldots, v_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r,\ v = v_1 + \cdots + v_r\,;$$
3. les *sev* F_i sont **supplémentaires** si la somme des F_i est directe et égale à l'*ev* E.

La somme des r *sev* F_i est notée $F_1 + \cdots + F_r$ ou $\sum_{i=1}^{r} F_i$. Si elle est directe, alors on la note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ ou $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. Les *sev* sont supplémentaires si, et seulement si, $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i = E$.

Exercice 7 — *Montrer que les trois sev*

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \\ G & = & \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \\ H & = & \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\} \end{array}$$

de l'ev $E = \mathbb{R}_3[X]$ sont supplémentaires.

Proposition 8

Soient $F_1, \cdots, F_r$ des *sev* d'un $\mathbb{K} - ev$ E.

1. La somme des *sev* F_i de E est encore un *sev* de E.
2. Si les *sev* F_i sont de dimensions finies, alors $\dim \sum_{i=1}^{r} F_i \leq \sum_{i=1}^{r} \dim F_i$.
3. La somme des *sev* F_i est directe si, et seulement si, $\dim \sum_{i=1}^{r} F_i = \sum_{i=1}^{r} \dim F_i$.

Preuve — On utilise l'application $\varphi : \prod_{i=1}^{r} F_i \to E,\ (v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 + \cdots + v_r$.

1. $\operatorname{Im} \varphi$ est un *sev* de E car φ est linéaire. Et $\operatorname{Im} \varphi = \sum_{i=1}^{r} F_i$, qui est donc un *sev*.
2. D'après le théorème du rang, $\dim \prod_{i=1}^{r} F_i = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$, d'où $\dim \sum_{i=1}^{r} F_i = \dim \operatorname{Im} \varphi \leq \dim \prod_{i=1}^{r} F_i = \sum_{i=1}^{r} \dim F_i$.
3. D'après la définition 6, la somme des F_i est directe si, et seulement si, φ est injective si, et seulement si, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$.

□

Exercice 9 (sur la somme de <u>deux</u> sous-espaces vectoriels) — *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E. En utilisant l'application $\varphi : F \times G \to E,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, montrer que :*

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \quad \text{et} \quad \textit{la somme } F+G \textit{ est directe} \iff F \cap G = \{0_E\}}$$

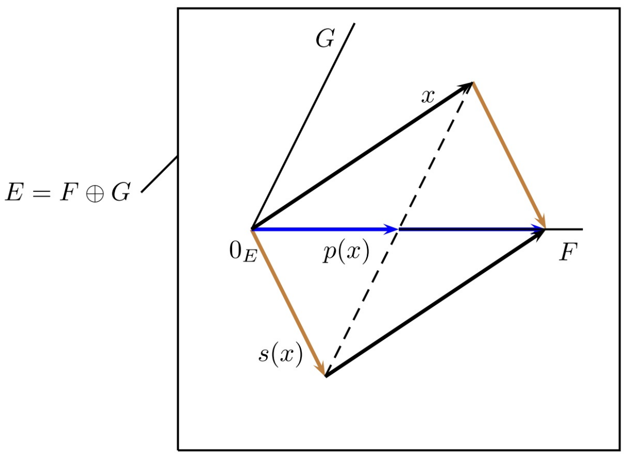

Figure II.2 – Symétrie et projecteur

Remarque 10 (sur les **projecteurs**) — *Si F et G sont deux sev de E supplémentaires, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$, où $(x_1, x_2) \in F \times G$. On peut donc définir le projeté $p(x)$ de*

x sur F parallèlement à G et le symétrique $s(x)$ de x par rapport à F parallèlement à G ainsi : $p(x) = x_1$ et $s(x) = x_1 - x_2$.

Pour tout $x \in E$, $x + s(x) = 2p(x)$, d'où $\mathrm{id}_E + s = 2p$. Se rappeler qu'un endomorphisme

$$\begin{cases} p \text{ est un projecteur} \iff p \circ p = p \\ s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \mathrm{id} \end{cases} \quad \text{et que} \quad \begin{cases} p \text{ projette sur } \mathrm{Im}\, p \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}\, p \\ s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) \end{cases}$$

Exercice 11 — *Soit E un ev de dimension finie. Montrer que : si p est un projecteur, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$ est égal à la dimension du sev sur lequel p projette.*

Si $E = F \oplus G$, on peut aussi définir le projecteur q sur G parallèlement à F. Alors

$$p + q = \mathrm{id}_E \quad , \quad p \circ p = p \quad , \quad q \circ q = q \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

De même, si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + \cdots + x_r$, où $(x_1, \cdots, x_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r$. Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, l'application $p_i : E \to E,\ x \mapsto x_i$ est le projecteur sur parallèlement à . Alors

$$p_1 + \cdots + p_r = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2, \quad p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 12 (**Hyperplans**)
Soit H un *sev* d'un *ev* E :

— (en dimension finie ou infinie) H est un hyperplan de E *ssi* H est le noyau d'une forme linéaire non nulle (c'est la définition), *ssi* H est le supplémentaire d'une droite vectorielle ;

— (en dimension finie $n = \dim E$) H est un hyperplan *ssi* $\dim H = n - 1$.

Preuve — Supposons que H est le noyau $\mathrm{Ker}\, \varphi$ d'une forme linéaire non nulle φ. Dans le $\mathbb{K} - ev$ E (de dimension finie ou infinie), il existe des vecteurs u n'appartenant pas à l'hyperplan H (car la forme linéaire est non nulle). De plus, si u est un tel vecteur n'appartenant pas à H, alors l'hyperplan H et la droite $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires : $H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$.

En effet, $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$. D'où, en posant le vecteur $a = \frac{1}{\varphi(u)} u$, il vient que :

- $H + \mathrm{Vect}(u) = E$ car tout vecteur x de E s'écrit $x = \varphi(x)a + x - \varphi(x)a$, or le vecteur $\varphi(x)a$ appartient à la droite $\mathrm{Vect}(u)$ et le vecteur $x - \varphi(x)a$ appartient à l'hyperplan H ;
- la somme $H + \mathrm{Vect}(u)$ est directe car $H \cap \mathrm{Vect}(u) = \{0_E\}$. En effet, si $x \in \mathrm{Vect}(u)$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ x = \lambda u$. Or $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) = 0 \implies \lambda = 0 \implies x = 0_E$.

Réciproquement, si H est le supplémentaire d'une droite vectorielle, alors il existe un vecteur u non nul tel que $H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit alors, de manière unique, $x = y + \alpha u$, où $y \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Parce que α est unique et dépend de x, on peut le noter $\varphi(x)$. L'application $\varphi : E \to \mathbb{K},\ x \mapsto \alpha = \varphi(x)$ est une forme linéaire non nulle (car $\varphi(u) = 1$) et H en est le noyau.

En dimension finie n, la preuve est fournie par l'exercice 4. □

II.4 Stabilité d'un *sev* par un endomorphisme

Définition 13
Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $u : E \to E$ un endomorphisme. On dit que F est **stable par** u si $\forall x \in F,\ u(x) \in F$, autrement dit : $u(F) \subset F$.

Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u, alors on peut restreindre l'ensemble de départ (c'est toujours possible) et l'ensemble d'arrivée (c'est possible car F est stable par u) pour définir l'application

$$u\,|_F :\ F \to F,\ x \mapsto u(x).$$

Cette application est l'endomorphisme **induit** sur F par u, c'est un endomorphisme de F.

EXEMPLE 14 — 1. *La dérivation $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P(X) \mapsto P'(X)$ est un endomorphisme. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.*

2. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un ev E ($E = F \oplus G$), alors F et G sont stables par le projecteur p sur F parallèlement à G. Et aussi par la symétrie s par rapport à F parallèlement à G. De plus,*

$$p\,|_F = \mathrm{id}_F \quad , \quad p\,|_G = 0 \quad , \quad s\,|_F = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad s\,|_G = -\mathrm{id}_G.$$

EXERCICE 15 — *La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente un endomorphisme u dans une base (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$. Interpréter géométriquement cet endomorphisme. Déterminer trois droites vectorielles stables par u. En déduire une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.*

> PROPOSITION 16
> Soient $u : E \to E$ et $v : E \to E$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Si u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$), alors le noyau $\operatorname{Ker} u$ et l'image $\operatorname{Im} u$ de u sont des sous-espaces vectoriels stables par v.

Preuve — Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On veut montrer que $v(x) \in \operatorname{Ker} u$:

$u\,(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0_E) = 0_E$, d'où $v(x) \in \operatorname{Ker} u$.

Soit $y \in \operatorname{Im} u$. On veut montrer que $v(y) \in \operatorname{Im} u$:

il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. D'où $v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) \in \operatorname{Im} u$. □

EXERCICE 17 — *Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par u est un sev. Et que ce sev est stable par v.*

Soit $E = F_1 \oplus F_2$ la somme directe de deux sous-espaces vectoriels F_1 (de dimension d_1) et F_2 (de dimension d_2). Dans une base $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ adaptée à cette somme directe, la matrice A de u est **triangulaire par blocs** si, et seulement si, F_1 est stable par u :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \end{array} & \left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline 0 & A_{22} \end{array}\right) \end{array}, \qquad \text{où} \qquad A_{11} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u\,|_{F_1}).$$

Elle est **diagonale par blocs** si, et seulement si, F_1 et F_2 sont stables par u :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \end{array} & \left(\begin{array}{c:c} A_{11} & 0 \\ \hdashline 0 & A_{22} \end{array}\right) \end{array}, \qquad \text{où} \qquad A_{11} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u\,|_{F_1}) \text{ et } A_{22} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u\,|_{F_2}).$$

MÉTHODE 18 (**Calculer par blocs**) — 1. *On peut multiplier par blocs deux matrices :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

2. *On en déduit que le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \end{array} & \left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline 0 & A_{22} \end{array}\right) \end{array}$$

triangulaire par blocs est $\quad \det A = \det A_{11} \times \det A_{22}$.

Preuve — $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{d_1} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_{d_1} & A_{12} \\ 0 & I_{d_2} \end{pmatrix}}_{N} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{d_2} \end{pmatrix}}_{P}$,
d'où $\det A = \det M \cdot \det N \cdot \det P$. *Or* $\det M = \det A_{22}$ *(développer en suivant les premières colonnes),* $\det N = 1$ *(déterminant triangulaire) et* $\det P = \det A_{11}$ *(développer en suivant les dernières colonnes).* □

On peut généraliser les propriétés ci-dessus à plus de deux sous-espaces vectoriels :

Exercice 19 — *Soient deux matrices T triangulaire par blocs et D diagonale par blocs :*

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_p}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_p \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & \\ 0 & A_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & A_{pp} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_p}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_p \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & & \\ 0 & A_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & A_{pp} \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. *Montrer que* $\quad \det T = \det D = \det A_{11} \times \det A_{22} \times \cdots \times \det A_{pp} = \prod_{i=1}^{p} \det A_{ii}$.
2. *On suppose qu'un espace vectoriel $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ est la somme directe de p sous-espaces vectoriels F_i de dimensions d_i et de bases $\mathcal{B}_i$. Dans la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ de E adaptée à cette somme directe, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est :*
   — *de la forme D diagonale par blocs si, et seulement si,* $\cdots$
   — *de la forme T triangulaire par blocs si, et seulement si,* $\cdots$

II.5 Polynômes d'un endomorphisme

Définition 20

Soit un polynôme $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. On note $P(u)$ l'endomorphisme
$$P(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_N u^N, \quad \text{où } u^0 = \mathrm{id}_E \text{ et } u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$
2. Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. On note $P(A)$ la matrice
$$P(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_N A^N, \quad \text{où } A^0 = I_n \text{ et } A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ fois}}.$$

Si E est de dimension finie, alors on peut représenter l'endomorphisme u par sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E et on constate que :
$$[P(u)]_{\mathcal{B}} = P\left([u]_{\mathcal{B}}\right).$$

Proposition 21
Soient un espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tous $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u) \quad \text{et} \quad (P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

Preuve —

(i) Soient $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k$. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)(u) &= \left(\sum_{k=0}^{N} (\alpha a_k + \beta b_k) X^k\right)(u) \\ &= \sum_{k=0}^{N} (\alpha a_k + \beta b_k) u^k = \alpha \sum_{k=0}^{N} a_k u^k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k \\ &= \alpha P(u) + \beta Q(u).\end{aligned}$$

(ii) On commence par les cas particuliers $P = X^p$ et $Q = X^q$:

$$(P \times Q)(u) = X^{p+q}(u) = u^{p+q} = u^p \circ u^q = P(u) \circ Q(u).$$

Puis on généralise à tous les polynômes P et Q en utilisant (i).

□

De même, soit A une matrice carrée. Pour tous $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A) \quad \text{et} \quad (P \times Q)(A) = P(A) \cdot Q(A).$$

Exercice 22 — *Soient A et B deux matrices semblables et P un polynôme. Montrer que :*

$$P(A) \text{ et } P(B) \text{ sont semblables} \quad \text{et} \quad P(A^T) = (P(A))^T.$$

II.6 Polynômes annulateurs

Définition 23
Soient un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On dit que P est un **polynôme annulateur** de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Autrement dit : si $\forall x \in E,\ P(u)(x) = 0_E$.
2. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})}$.

Exemple 24 — *Un endomorphisme u est*

— *un projecteur si, et seulement si, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de u.*

— *une symétrie si, et seulement si, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de u.*

Exercice 25 — *Soient $n \geq 2$ et la matrice*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}).$$

Calculer $(I_n + J)^2$ et en déduire que $X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est un polynôme annulateur de J.

MÉTHODE 26 (**Inverser une matrice**) — *Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N$ est un polynôme annulateur d'une matrice A et si $a_0 \neq 0$, alors $A \cdot (a_1I_n + a_2A + \cdots a_NA^{N-1}) = -a_0I_n$. Donc la matrice A est inversible et son inverse est*

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{N} a_kA^{k-1}.$$

EXERCICE 27 — *Montrer que la matrice J est inversible et que $J^{-1} = \frac{1}{n-1}\left(J - (n-2)I_n\right)$.*

MÉTHODE 28 (**Calculer les puissances d'une matrice**) — *Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N$ (où $a_N \neq 0$) est un polynôme annulateur d'une matrice A, alors la division euclidienne de X^k par P s'écrit*

$$X^k = P(X)Q_k(X) + R_k(X) \qquad \textit{avec} \qquad \deg(R_k) < N.$$

Donc $A^k = R_k(A)$.

EXERCICE 29 — *Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^k \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$ et $J^k = (-1)^kI_n + \frac{(n-1)^k-(-1)^k}{n}(I_n + J)$.*

II.7 Le polynôme minimal

PROPOSITION-DÉFINITION 30
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur non nul. L'unique polynôme annulateur de A qui est unitaire et de degré minimal est appelé **le polynôme minimal** de A et est noté μ_A (ou π_A). Un polynôme est annulateur de A si, et seulement si, il est divisible par μ_A.

Preuve — Le $\mathbb{K}-ev$ $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est de dimension n^2, d'où les n^2+1 matrices $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2, \cdots, A^{n^2}$ sont liées, d'où : il existe $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ non tous nuls tels que $a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_{n^2}A^{n^2} = 0$. Donc le polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n^2}X^{n^2}$ est non nul et est annulateur de la matrice A. L'ensemble $\mathcal{I}_A$ des polynômes annulateurs de A n'est donc pas réduit à $\{0\}$. C'est de plus un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes, d'après la définition d'un idéal donnée dans l'annexe **??**.

Donc il existe un unique polynôme unitaire μ_A tel que $\mathcal{I}_A = \mu_A\mathbb{K}[X]$, d'après une proposition de l'annexe **??**. □

La proposition 30 vaut pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, donc aussi pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si E est de dimension finie. Le polynôme minimal de l'endomorphisme u est noté μ_u (ou π_u).

EXERCICE 31 —
1. *Déterminer le polynôme minimal de la matrice J de l'exercice 25.*
2. *Montrer que la dérivation $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ ne possède pas de polynôme annulateur non nul.*
3. *Montrer que deux matrices semblables ont les mêmes polynômes annulateurs et donc le même polynôme minimal.*

REMARQUE 32 — *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. L'application $e_A : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, $P \mapsto P(A)$ évalue chaque polynôme P en A. C'est un morphisme d'anneaux, d'espaces vectoriels et même d'algèbres.*

Preuve — *C'est une conséquence de la proposition 21 et de la propriété $e_A(1) = I_n$ qui résulte de la définition 20.* □

*Son noyau $\mathrm{Ker}(e_A)$ est donc un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$. C'est l'ensemble des polynômes annulateurs de la matrice A, aussi appelé l'**idéal annulateur** de la matrice A.*

Son image $\mathrm{Im}(e_A)$, notée $\mathbb{K}[A]$, est donc une sous-algèbre (commutative) de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Si $d = \deg(\mu_A)$ est le degré du polynôme minimal de A, alors $\left(I_n, A, \cdots, A^{d-1}\right)$ est une base de l'ev $\mathbb{K}[A]$, qui est donc de dimension d :

$$\boxed{\dim \mathbb{K}[A] = \deg(\mu_A)}$$

Preuve — *La famille* $\left(I_n, A, \cdots, A^{d-1}\right)$ *est :*

- *libre, sinon il existerait des scalaires* $a_0, \cdots, a_{d-1}$ *non tous nuls tels que* $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{d-1} A^{d-1} = 0$ *et, par suite* $a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1}$ *serait un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à* $\deg \mu_A$, *ce qui est absurde ;*
- *génératrice de* $\mathbb{K}[A]$ *car, pour tout polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$, *la division euclidienne de* P *par* μ_A *donne* $P = \mu_A \times Q + R$ *et* $\deg R < \deg \mu_A$. *On évalue ces polynômes en* A *:* $P(A) = \mu_A(A) \cdot Q(A) + R(A) = R(A) \in \operatorname{Vect}\left(I_n, A, \cdots, A^{d-1}\right)$.

□

Définition 33
On dit que :

- un endomorphisme u est **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$;
- une matrice carrée A est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Si la matrice A est nilpotente, alors le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ est appelé l'**indice** de nilpotence de A. Cet indice est aussi l'unique entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$.

Exercice 34 — *Soit une matrice* $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, *nilpotente d'indice* r. *Montrer que :*

1. *le polynôme minimal de* A *est* X^r *;*
2. *l'indice de nilpotence est inférieur ou égal à la taille de la matrice* $(r \leq n)$ *;*
3. $A^n = 0$.

II.8 Le lemme des noyaux

Lemme 35 (des noyaux)

Soit u un endomorphisme. Si $P(X) = \prod_{k=1}^{r} P_k(X)$ est un produit de polynômes $P_1(X), \ldots, P_r(X)$ deux à deux premiers entre eux, alors chaque noyau $\operatorname{Ker} P_k(u)$ est stable par u et

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u).$$

Preuve — Pour chaque $k \in [\![1, r]\!]$, les endomorphismes u et $v = P_k(u)$ commutent, d'où (proposition 16) le noyau $\operatorname{Ker}(v)$ est stable par u. Puis, par récurrence sur $r \geq 2$:

1. D'abord $r = 2$: d'après le théorème de Bézout, il existe $(A_1, A_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que
$$A_1 P_1 + A_2 P_2 = 1, \quad \text{d'où} \quad (A_1 P_1)(u) + (A_2 P_2)(u) = \mathrm{id}_E. \quad (*)$$
   - Si $x \in \operatorname{Ker} P_2(u)$, alors $x \in \operatorname{Ker} P(u)$ car $P(u)(x) = (P_1(u) \circ P_2(u))(x) = P_1(u)\left[P_2(u)(x)\right] = P_1(u)(0) = 0$. De même si $x \in \operatorname{Ker} P_1(u)$ car $P(u) = P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u)$. Donc
$$\operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u) \subset \operatorname{Ker} P(u).$$
   - Soit $x \in \operatorname{Ker} P(u)$. D'après $(*)$,
$$x = x_1 + x_2, \quad \text{où} \quad x_1 = (A_2 P_2)(u)(x) \text{ et } x_2 = (A_1 P_1)(u)(x).$$
     Or $x_1 \in \operatorname{Ker} P_1(u)$ car
$$P_1(u)(x_1) = (P_1 A_2 P_2)(u)(x) = (A_2(u) \circ P(u))(x) = 0.$$
     De même, $x_2 \in \operatorname{Ker} P_2(u)$. Donc
$$\operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u) = \operatorname{Ker} P(u).$$

— Montrons que la somme est directe.
Si $x \in \operatorname{Ker} P_1(u) \cap \operatorname{Ker} P_2(u)$, alors $x = 0$ car $x = A_2(u) \circ P_2(u)(x) + A_1(u) \circ P_1(u)(x)$ d'après $(*)$. Donc

$$\operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \operatorname{Ker} P_2(u) = \operatorname{Ker} P(u).$$

2. Supposons que la propriété est vraie pour r polynômes. Les deux polynômes $Q = P_1 \cdots P_r$ et P_{r+1} sont premiers entre eux. D'où $\operatorname{Ker} Q(u) \oplus \operatorname{Ker} P_{r+1}(u) = \operatorname{Ker} P(u)$. Or $\operatorname{Ker} Q(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u)$, donc $\bigoplus_{k=1}^{r+1} \operatorname{Ker} P_k(u) = \operatorname{Ker} P(u)$.

□

Dans le cas particulier où P est un polynôme annulateur de u,

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u)$$

car $P(u) = 0$, d'où $\operatorname{Ker} P(u) = E$. Dans une base de E adaptée à cette somme directe, la matrice de u sera diagonale par blocs car chaque noyau $\operatorname{Ker} P_k(u)$ est stable par u.

Exercice 36 — *Soient E un $\mathbb{K}-ev$ et u un endomorphisme de E tel que $u^3 = u$. Montrer que*

$$\operatorname{Ker}(u + \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u) = E$$

de deux manières :

1. *par analyse-synthèse ;*
2. *en utilisant le lemme des noyaux.*