Feuille de T.D. n° 2

Algèbre linéaire

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$.
2. Noyau et image sont-ils supplémentaires ?
3. Déterminer une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'endomorphisme $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P \mapsto P' + P$ est bijectif.
2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P(X) \mapsto X \cdot [P(X) - P(X-1)]$. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par f. Écrire la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Même question pour φ.

Exercice 3. Soit x_0 un réel. On considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & \left(\displaystyle\int_{-1}^{+1} P(t)\, dt, P(x_0), P(-x_0) \right). \end{array}$$

1. Ecrire la matrice, dans les bases canoniques, de l'application linéaire f.
2. Quelles sont les trois valeurs de x_0 pour lesquelles l'application f n'est pas injective ?
   Déterminer, pour chacune de ces valeurs, une base du noyau de f.
3. Pour quelles valeurs de x_0 l'application f est-elle bijective ?
   Calculer alors $f^{-1}(a, b, c)$ pour chaque $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (Matrices carrées de rang 1). Soit A une matrice carrée telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

1. En se plaçant dans une base adaptée, montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.
2. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V non nuls tels que : $A = U \cdot V^T$. Redémontrer ainsi le résultat de la question précédente. En utilisant les vecteurs colonnes U et V, déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une équation de l'hyperplan $\mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 5. Soient $x,\ y,\ z$ et t quatre nombres réels. Calculer, *en le factorisant au maximum*, le déterminant

$$D(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & -z & t \\ z & t & x & y \\ -z & t & -x & y \end{vmatrix}.$$

Exercice 6. Calculer, sous une forme factorisée, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

(Une indication ? Insérer une nouvelle ligne et une nouvelle colonne dans ce déterminant pour faire apparaître un déterminant de Vandermonde.)

Exercice 7 (Famille libre)**.** Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n+1$ formes linéaires :

$$\phi_k : P \mapsto P^{(k)}(0) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, \ldots n\}.$$

Montrer que la famille $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ est libre.

Exercice 8 (Famille libre)**.** Soient n réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Montrer (de deux manières) que les n fonctions définies, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, par

$$f_k\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{a_k x}$$

sont linéairement indépendantes.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

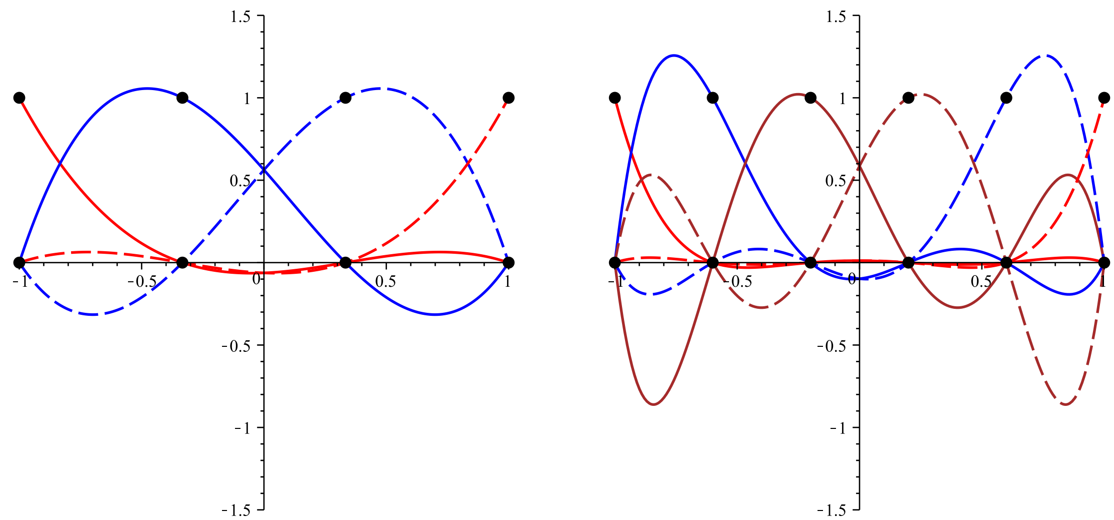
Exercice 10 (Trace & noyau de $A^T A$)**.** Soit une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le réel $\mathrm{tr}(A^T \cdot A)$ est égal à la somme des carrés de tous les éléments de la matrice A.
2. Montrer que : $A^T A = 0 \iff A = 0$.
3. Montrer que que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}(A^T \cdot A)$.
4. Soit la forme linéaire
$$\tau_A\ :\ \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ M \mapsto \mathrm{tr}(A^T \cdot M).$$
Calculer l'image $\tau_A(E_{ij})$ de chaque matrice E_{ij} de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer, de deux manières, que : la forme linéaire τ_A est nulle si, et seulement si, la matrice A est nulle.

Exercice 11 (**Polynômes de Lagrange** & déterminants de Vandermonde)**.** Soient un entier $n \geq 2$ et n réels $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$ supposés distincts deux à deux. Soit l'application

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n,\ P \mapsto (P(a_1), P(a_2), \cdots, P(a_n))\,.$$

1. Montrer que l'application φ est linéaire et déterminer son noyau.



LES POLYNÔMES DE LAGRANGE POUR $n = 4$ ET $n = 6$ RÉELS ÉQUIDISTANTS DANS [-1,+1]

2. On munit les $\mathbb{R}-$espaces vectoriels $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ de leur base canonique : $(1, X, \cdots, X^{n-1})$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ respectivement. Écrire la matrice M représentant φ dans ces bases. Quel est le déterminant de cette matrice ?
3. Les n polynômes de Lagrange $L_1,\ L_2, \cdots,\ L_n$ sont définis par
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad L_i(X) = \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$
Calculer $\varphi(L_i)$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$.
4. En utilisant à chaque fois une des trois questions précédentes, démontrer de trois manières que l'application φ est bijective.
5. Montrer que $(L_1, L_2, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. Reconnaître les polynômes
$$\sum_{i=1}^{n} P(a_i)\, L_i(X) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} L_i(X).$$

Exercice 12 (Les noyaux des itérés sont emboîtés).

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k).$$
2. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1})$.
3. Montrer que, pour tout $k \geq r$: $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
4. Montrer que, pour tout $k \geq r$: $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^r)$ et $\mathrm{Im}(f^r)$ sont supplémentaires.

Exercice 13. Soient une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et l'endomorphisme

$$\varphi_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto A \cdot M.$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ_A est bijectif si, et seulement si, la matrice A est inversible.
2. Déterminer la trace $\operatorname{tr}(\varphi_A)$ de l'endomorphisme φ_A.

Exercice 14 (Polynômes annulateurs)**.** 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Φ l'endomorphisme défini par

$$\Phi(M) = (\operatorname{tr} M)I_n + M$$

pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de Φ.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\Phi(M) = PM + MP.$$

Déterminer un polynôme annulateur de Φ.

Exercice 15 (Polynômes annulateurs)**.** Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f : E \to E$ un endomorphisme. Montrer que : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont le produit est annulateur de f, alors $\operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Ker} P(f)$ et $\operatorname{Im} P(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f)$.

Exercice 16. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17 (Oral Centrale PC 2007)**.** Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p le projecteur sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{id}_E - p$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

Exercice 18 (Oral Centrale PSI 2014)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que :

$$\dim(\operatorname{Ker} u) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u^2) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} u).$$

(On pourra utiliser l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$.)

Exercice 19 (Hyperplans)**.** Soit E un espace vectoriel. Soient H et H' deux hyperplans de E. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 20 (Matrices à diagonale strictement dominante)**.** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que la matrice A est inversible.