D.M. n° 1 de mathématiques

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. On montre, de deux manières, que sa somme $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est égale à $\frac{\pi^2}{6}$.

Partie 1 :

1) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin x \leq x \leq \tan x$.

2) Soit, pour chaque $x \in]0, \pi[$, $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cot^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cot^2 x.$$

3) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit un réel α. Exprimer $\sin\left((2n+1)\alpha\right)$ en fonction de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.

b) Montrer que, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, le réel $\cot^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}$ est une racine du polynôme

$$P(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}.$$

c) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ en fonction de n. Conclure.

Partie 2 (*tirée de Mines-Ponts 2023 Math 2 MP/MPI*) :

4) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$\sigma \,:\, x \mapsto \sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

5) Exhiber deux nombres réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(nt) \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

6) Montrer que, si $t \in]0, \pi]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

7) Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue : si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(xt) \mathrm{d}t = 0.$$

8) Montrer que la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, \pi],\ \varphi(t) = \frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

9) Conclure.