FEUILLE DE T.D. N° 1

Séries numériques

Exercice 1. Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

1. $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\sum \frac{1}{n \cdot n^{1/n}}$
3. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
4. $\sum \frac{n^{100}}{e^n}$ François
5. $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ Salomé
6. $\sum \frac{1}{\ln(n!)}$
7. $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$ Clément
8. $\sum \frac{n}{(\ln n)^n}$ Paul M.
9. $\sum \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ Tomass
10. $\sum \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^n$
11. $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

Exercice 2 (*Discuter suivant les valeurs d'un paramètre*)**.** Pour quelles valeurs du réel a la série $\sum \frac{a^n}{n+a^{2n}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3 (*Séries géométriques*)**.**

1. Calculer $\int_0^1 t^{2k}\,dt$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.
3. De même, après avoir décomposé en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(4x+1)(4x+3)}$, montrer que la série $\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{\pi}{8}$.

Exercice 4 (*Télescope et D.L.*)**.**

1. Montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ converge et calculer sa somme
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

Alex

2. Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Montrer qu'il existe des réels a et b uniques tels que la série $\sum u_n$ soit convergente. Calculer alors sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Exercice 5 (*Discuter suivant les valeurs d'un paramètre*)**.** Pour quelles valeurs du réel $a \neq 0$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ est-elle convergente ?

Exercice 6 (*Convergence non absolue*)**.** Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge mais la série $\sum |u_n|$ diverge. Soient P_n et M_n les suites définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \max(0, u_n) \qquad \text{et} \qquad M_n = \min(0, u_n).$$
Montrer que les séries $\sum P_n$ et $\sum M_n$ divergent.

Exercice 7 (*Nombres complexes*)**.** Soient un réel θ fixé de sorte que $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$.

Soient les deux suites $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Alexandre

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$C_n + iS_n = e^{i\frac{n\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$
et en déduire que la suite (C_n) est bornée.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \frac{C_n}{n+1} - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{k(k+1)}$$

et en déduire que la série $\sum \frac{\cos(k\theta)}{k}$ est convergente.

Exercice 8 (La fonction *zêta* de Riemann).

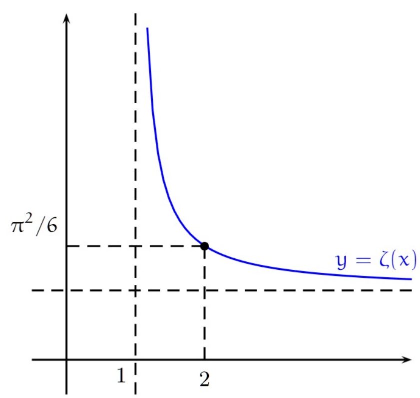

FIGURE 1 – LA FONCTION ζ DE RIEMANN.

Arthur

1. Soit

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que l'ensemble de définition de la fonction ζ est l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

2. Montrer que la fonction ζ est décroissante sur l'intervalle I.
3. Montrer que, pour tout $x \in I$, $1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$.
4. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \zeta(x)$. Proposer un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+.

Exercice 9 (*Série télescopique, comparaison série-intégrale & théorème de sommation des équivalents*)**.** Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

1. Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{32n^3}$. En déduire que la suite (u_n) converge.
2. Montrer que sa limite vaut $\ell = \frac{\ln(2)}{2}$.
3. Montrer que $\ell - u_n \sim \frac{1}{64n^2}$.

Exercice 10 (*Série télescopique & théorème de sommation des équivalents*)**.**

1. Soit la suite définie par $u_0 \in]0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est nulle.
   (b) À l'aide d'un D.L., déterminer un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite non nulle.
   (c) En déduire un équivalent de u_n.
2. Mêmes questions sur la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n u_{n-1}}$.

Exercice 11 (*Formule de Stirling*)**.** Montrer que la série $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est convergente et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2\ln u_p$, où $u_p = \frac{(2p+1)!}{2^{2p} p!^2 \sqrt{2p+2}}$. En utilisant la formule de Stirling, déterminer un équivalent de u_p et en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 - \ln \pi$.