# CORRIGÉ DU T.D. N° 1

*Séries numériques*

12 SEPTEMBRE 2024

**Exercice 1.** Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

1. $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\sum \frac{1}{n \cdot n^{1/n}}$
3. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
4. $\sum \frac{n^{100}}{e^n}$
5. $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$
6. $\sum \frac{1}{\ln(n!)}$
7. $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$
8. $\sum \frac{n}{(\ln n)^n}$
9. $\sum \left(\frac{1}{n}-1\right)^n$
10. $\sum \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^n$
11. $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

**Exercice 2** (*Discuter suivant les valeurs d'un paramètre*)**.** Pour quelles valeurs du réel $a$ la série $\sum \frac{a^n}{n+a^{2n}}$ est-elle convergente ?

---

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^n}{n+a^{2n}}$. On disjoint les cas :

- si $|a| > 1$, alors $|u_n| \sim \frac{|a|^n}{a^{2n}} \sim \left(\frac{1}{|a|}\right)^n$. Or la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{|a|}\right)^n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge absolument.
- si $|a| < 1$, alors $|u_n| \sim \frac{|a|^n}{n} \leq |a|^n$. Or la série géométrique $\sum |a|^n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge absolument.
- si $a = 1$, alors $u_n = \frac{1}{n+1}$ et la série harmonique $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.
- si $a = -1$, alors $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ et la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

**Exercice 3** (*Séries géométriques*)**.**

1. Calculer $\int_0^1 t^{2k}\,dt$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.
3. De même, après avoir décomposé en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(4x+1)(4x+3)}$, montrer que la série $\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{\pi}{8}$.

---

1. $\int_0^1 t^{2k}\,dt = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$ et, en reconnaissant une somme géométrique :
$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$.

2. On peut affirmer, grâce au théorème des séries alternées, que la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge car la suite $\frac{1}{2k+1}$ tend vers zéro en décroissant. (Mais cela ne donne pas la valeur de la limite.) Autre méthode, on calcule la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ grâce à la question précédente : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \right) dt$ par linéarité de l'intégrale. D'où

$$S_n = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Puis on montre que la dernière intégrale tend vers 0 quand $n$ tend vers $\infty$ :
$\forall t \in [0,1], 0 \le \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \le t^{2n+2}$, d'où $0 \le \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \le \frac{1}{2n+3}$ par croissance de l'intégrale.

D'après le théorème des gendarmes, quand $n$ tend vers l'infini, la suite des réels $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ tend vers zéro et aussi le produit $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ car la suite des réels $(-1)^n$ est bornée.

D'où la suite des réels $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ tend vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Donc la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

3. $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} \sim \frac{1}{16n^2}$ d'où (par comparaison de séries à termes positifs) la série $\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ converge.

4. On commence par décomposer la fraction. On cherche $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4} \right\}, \quad \frac{1}{(4x+1)(4x+3)} = \frac{\alpha}{4x+1} + \frac{\beta}{4x+3}.$$

En multipliant l'égalité par $4x+1$ et en prenant $x = -\frac{1}{4}$, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant l'égalité par $4x+3$ et en prenant $x = -\frac{3}{4}$, on trouve $\beta = -\frac{1}{2}$.
Pour calculer la somme de la série, on étudie la limite des sommes partielles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left( \int_0^1 x^{4k} - x^{4k+2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) \sum_{k=0}^{n} (x^4)^k dx. \end{aligned}$$

Or $(1-x^2) \sum_{k=0}^{n} (x^4)^k = (1-x^2) \frac{1-x^{4n+4}}{1-x^4} = \frac{1-x^{4n+4}}{1+x^2}$. D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} dx.$$

Or $0 \le \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} dx \le \frac{1}{2} \int_0^1 x^{4n+4} dx \le \frac{1}{2(4n+5)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'où $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\arctan(1) - \arctan(0)] = \frac{\pi}{8}$.

**Exercice 4** (*Télescope et D.L.*). 1. Montrer que la série $\sum \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$ converge et calculer sa somme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right).$$

2. Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Montrer qu'il existe des réels $a$ et $b$ uniques tels que la série $\sum u_n$ soit convergente. Calculer alors sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

1. <u>Première méthode :</u> **avec un DL de la suite, on va trouver la nature mais pas la somme de la série.** Les trois termes de la somme $\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}$ ont pour terme dominant $\frac{1}{\sqrt{n}}$, qu'on met en facteur pour calculer un D.L. :
$\frac{1}{\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot(1+u)^{\alpha}$ avec $u=-\frac{1}{n}\to 0$ et $\alpha=-\frac{1}{2}$.
D'où $\frac{1}{\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_n\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n\sqrt{n}}+\frac{3}{8n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\varepsilon_n$.
De même, $\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_n\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n\sqrt{n}}+\frac{3}{8n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\varepsilon_n$.
Donc $\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{3}{4n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\varepsilon_n\sim\frac{3}{4n^{5/2}}$.
La série $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ est de même nature que la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^{5/2}}$, donc convergente.

<u>Deuxième méthode, meilleure :</u> **grâce à un télescope, on va trouver la nature et la somme de la série.** Pour tout $N\geq 2$, $\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}+\frac{1}{\sqrt{N+1}}-\frac{2}{\sqrt{N}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{N+1}}-\frac{1}{\sqrt{N}}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc la série $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ converge et sa somme vaut $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. **D'abord, avec un DL, on détermine la nature de la série** : $u_n=\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}=\sqrt{n}+a\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+b\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}=\sqrt{n}+a\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_n\right)+b\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_n\right)$.
On ordonne les termes : $u_n=(1+a+b)\sqrt{n}+\left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(\frac{a}{8}+\frac{b}{2}\right)\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{1}{n^{3/2}}\varepsilon_n$.
On discute :
   - si $1+a+b\neq 0$, alors $u_n\sim(1+a+b)\sqrt{n}$, or la série $\sum\sqrt{n}$ diverge grossièrement, donc la série $\sum u_n$ aussi ;
   - si $a+b=-1$ et $\frac{a}{2}+b\neq 0$, alors $u_n\sim\left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$, or la série $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann avec $\alpha=\frac{1}{2}$), donc la série $\sum u_n$ aussi ;
   - si $a+b=-1$ et $b=-\frac{a}{2}$, alors $a=-2$ et $b=1$, d'où $u_n\sim-(\frac{-2}{8}+\frac{1}{2})\frac{1}{n^{3/2}}$, or la série $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum u_n$ converge.

Finalement : la série converge si, et seulement si, $a=-2$ et $b=1$.

**Ensuite, grâce à un télescope, on calcule la somme de la série, dans le cas où elle converge** : pour tout $N\geq 0$, $\sum_{n=0}^{N}u_n=\left(\sqrt{0}-2\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{1}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)+\cdots+\left(\sqrt{N}-2\sqrt{N+1}+\sqrt{N+2}\right)=-1-\sqrt{N+1}+\sqrt{N+2}$. Or $\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}=\frac{1}{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}}\to 0$.
Donc $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=-1$.

**Exercice 5** (*Discuter suivant les valeurs d'un paramètre*)**.** Pour quelles valeurs du réel $a\neq 0$ la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$ est-elle convergente ?

---

Soit $u_n=\frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$. Si $a<0$, alors la suite $u_n$ ne tend pas vers zéro, donc la série $\sum u_n$ diverge.

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n^a}-\frac{1}{n^{2a}}(1+\varepsilon_n).$$

Or la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^a}$ converge d'après le TSA car la suite $\frac{1}{n^a}$ tend vers zéro en décroissant. Et les séries $\sum\frac{1}{n^{2a}}(1+\varepsilon_n)$ et $\sum\frac{1}{n^{2a}}$ sont de même nature, donc convergent si, et seulement si, $2a>1$.

Donc la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a>\frac{1}{2}$.

**Exercice 6** (*Convergence non absolue*)**.** Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge mais la série $\sum|u_n|$ diverge. Soient $P_n$ et $M_n$ les suites définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P_n=\max(0,u_n)\qquad\text{et}\qquad M_n=\min(0,u_n).$$

Montrer que les séries $\sum P_n$ et $\sum M_n$ divergent.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_n = P_n + M_n$. Or la série $\sum u_n$ converge, d'où les séries $\sum P_n$ et $\sum M_n$ sont de même nature.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = P_n - M_n$. Or la série $\sum |u_n|$ diverge, d'où les séries $\sum P_n$ et $\sum M_n$ divergent.

**Exercice 7** (*Nombres complexes*)**.** Soient un réel $\theta$ fixé de sorte que $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$.

Soient les deux suites $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$C_n + iS_n = e^{i\frac{n\theta}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

   et en déduire que la suite $(C_n)$ est bornée.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \frac{C_n}{n+1} - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{k(k+1)}$$

   et en déduire que la série $\sum \frac{\cos(k\theta)}{k}$ est convergente.

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} \\
C_n + iS_n &= e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin \frac{(n+1)}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
|C_n + iS_n| &= \left| \frac{\sin \frac{(n+1)}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \\
|C_n + iS_n| &\leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|}
\end{aligned}$$

   Or la valeur absolue $|C_n|$ du réel $C_n$ est inférieure au module du complexe $|C_n + iS_n| = \sqrt{C_n^2 + S_n^2}$, d'où la suite $|C_n|$ est majorée par la constante $\frac{1}{\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|}$, donc la suite $C_n$ est bornée.

2. C'est un télescope :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k - C_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{C_k}{k} - \frac{C_k}{k+1} \right) + \frac{C_n}{n+1} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{k(k+1)} + \frac{C_n}{n+1} - 1
\end{aligned}$$

   D'une part la série $\sum \frac{C_k}{k(k+1)}$ est absolument convergente car $\frac{C_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ car la suite $C_k$ est bornée. D'autre part la suite $\frac{C_n}{n+1}$ tend vers 0 car c'est le produit d'une suite bornée $C_n$ par une suite $\frac{1}{n+1}$ tendant vers zéro. Donc la série $\sum \frac{\cos(k\theta)}{k}$ converge.

**Exercice 8 (La fonction *zêta* de Riemann).**

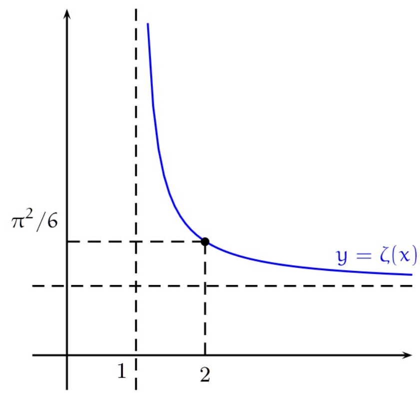


FIGURE 1 – LA FONCTION $\zeta$ DE RIEMANN.

1. Soit
$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$
Montrer que l'ensemble de définition de la fonction $\zeta$ est l'intervalle $I=]1,+\infty[$.
2. Montrer que la fonction $\zeta$ est décroissante sur l'intervalle $I$.
3. Montrer que, pour tout $x\in I$, $1+\dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}}\leq\zeta(x)\leq 1+\dfrac{1}{x-1}$.
4. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\zeta(x)$. Proposer un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x$ tend vers $1^+$.

---

1. Le réel $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ est défini si, et seulement si, la série $\sum\dfrac{1}{n^x}$ converge. C'est le cas si, et seulement si, $x>1$ d'après le critère de Riemann.
2. Soient deux réels $a$ et $b$ tels que $1<a\leq b$. Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^a}\geq\frac{1}{n^b}$, d'où $\zeta(a)\geq\zeta(b)$. Donc la fonction $\zeta$ est décroissante sur $I$.
3. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^x}=\mathrm{e}^{-x\ln t}$ est décroissante et continue. D'où (en comparant série et intégrale) :
$$\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_2^{N+1}=\int_2^{N+1}\frac{1}{t^x}\,dt\leq\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^x}\leq\int_1^N\frac{1}{t^x}\,dt=\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^N.$$
Et les inégalités larges passent à la limite $N\to\infty$ (⚠ ce n'est pas le théorème des gendarmes qu'on utilise) :
$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{x-1}.$$
Enfin, on ajoute 1 à chaque membre :
$$1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\leq 1+\frac{1}{x-1}.$$
4. En $+\infty$, on utilise le théorème des gendarmes : $\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$ et $\frac{1}{x-1}$ tendent vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$, donc $\zeta(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$.
Quand $x$ tend vers $1^+$, $\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$ tend vers $+\infty$. Donc $\zeta(x)\underset{x\to1^+}{\longrightarrow}+\infty$. Plus précisément, quand $x$ tend vers $1^+$ : $\zeta(x)\sim\frac{1}{x-1}$. Pour le prouver, on divise par $\frac{1}{x-1}$ chaque membre de l'encadrement :
$$(x-1)+\frac{1}{2^{x-1}}\leq\frac{\zeta(x)}{\frac{1}{x-1}}\leq(x-1)+1$$
Les deux gendarmes tendent vers 1 quand $x$ tend vers $1^+$, d'où $\frac{\zeta(x)}{\frac{1}{x-1}}\underset{x\to1^+}{\longrightarrow}1$.

**Exercice 9** (*Série télescopique, comparaison série-intégrale & théorème de sommation des équivalents*)**.** Soit la suite $(u_n)$ définie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, par
$$u_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}.$$

1. Montrer que $u_{n+1}-u_n \sim \dfrac{1}{32n^3}$. En déduire que la suite $(u_n)$ converge.
2. Montrer que sa limite vaut $\ell = \dfrac{\ln(2)}{2}$.
3. Montrer que $\ell - u_n \sim \dfrac{1}{64n^2}$.

---

1. $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$, d'où : $u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2(n+1)-1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}$ et

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(4n+1)(4n+3)(2n+1)}$$

   après calcul pour tout mettre sur le même dénominateur. Donc $u_{n+1}-u_n \sim \frac{1}{32n^3}$.
   La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$, donc convergente.
   Or $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$ (c'est une somme télescopique), donc la suite $(u_n)$ converge.
2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ est continue et décroissante sur $[n;2n]$, d'où (en comparant série et intégrale, voir figure) :

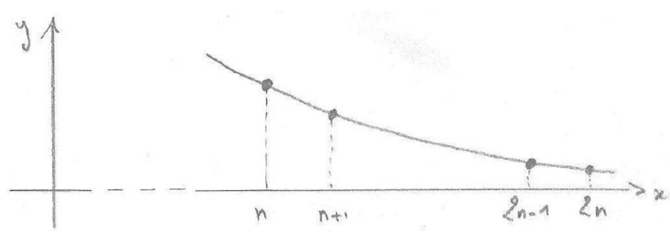


FIGURE 2 – COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4n+1}{2n+1}\right) = \int_n^{2n} \frac{1}{2x+1}\,dx \le u_n \le \int_{n-1}^{2n-1} \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4n-1}{2n-1}\right).$$

   Les deux gendarmes convergent et ont la même limite $\frac{1}{2}\ln 2$, donc $u_n$ converge et sa limite vaut $\frac{1}{2}\ln 2$.
3. $u_n = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)+u_1$, d'où $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty}(u_{k+1}-u_k)+u_1$, donc $\ell - u_n = \sum_{k=n}^{\infty}(u_{k+1}-u_k)$ est le reste de la série convergente $\sum(u_{k+1}-u_k)$. Or $u_{k+1}-u_k \sim \frac{1}{32k^3}$, d'où $\ell - u_n \sim \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{32k^3}$ d'après le théorème de sommation des $\sim$.
   Or, en comparant série et intégrale, on obtient l'encadrement $\frac{1}{2n^2} \le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} \le \frac{1}{2(n-1)^2}$, d'où $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$, donc $\ell - u_n \sim \frac{1}{64n^2}$.

**Exercice 10** (*Série télescopique & théorème de sommation des équivalents*)**.**

1. Soit la suite définie par $u_0 \in ]0,1]$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et que sa limite est nulle.
   (b) À l'aide d'un D.L., déterminer un réel $\alpha$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite non nulle.
   (c) En déduire un équivalent de $u_n$.
2. Mêmes questions sur la suite définie par $u_0>0$, $u_1>0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n u_{n-1}}$.

---

1. (a) Par récurrence, $u_n \in ]0,1]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'une part, la suite $(u_n)$ est donc minorée (par 0). D'autre part, elle est décroissante : $u_{n+1} = \sin u_n \le u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $\sin x \le x$ pour tout $x \ge 0$. La suite $(u_n)$ est donc convergente car décroissante et minorée. Soit $\ell\in\mathbb{R}$ sa limite.
   La fonction sin est continue, donc $\ell$ est un point fixe : $\ell = \sin\ell$. Or 0 est l'unique point fixe de la fonction sin (pour le prouver, étudier la fonction $[0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x-\sin x$). La suite $(u_n)$ tend donc vers 0.

(b) De $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit le D.L. $u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{3!} + o(u_n^3) = u_n \cdot \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)$. Par suite $u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha \cdot \left(1 - \alpha \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)$. (À noter que $u_n^\alpha$ est bien défini car $u_n > 0$.) Donc $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = -\alpha \frac{u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})$ tend vers une limite finie et non nulle si $\alpha = -2$. Cette limite vaut $\frac{1}{3}$.

(c) On a montré que $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$ est équivalent à $\frac{1}{3}$, qui ne change pas de signe. Or la série $\sum \frac{1}{3}$ diverge, donc les sommes partielles sont équivalentes (d'après le théorème de sommation des équivalents) : $\sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{3}$. Cette somme est télescopique, d'où $u_n^{-2} - u_0^{-2} \sim \frac{n}{3}$. En divisant par $n$, $\frac{u_n^{-2}}{n}$ tend vers $\frac{1}{3}$. Or $u_n$ est positif, d'où $\frac{u_n^{-1}}{\sqrt{n}}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

2. Par récurrence , $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $u_{n+1} \leq u_n$. La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée, donc convergente. Sa limite $\ell \in \mathbb{R}$ est un point fixe : $\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2}$. D'où $\ell^3 = 0$, donc $\ell = 0$.

De $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit deux choses : d'une part $u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha \cdot (1 - \alpha u_n u_{n-1} + o(u_n u_{n-1}))$, d'autre part $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$ car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n u_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

D'où $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} -\alpha u_n^{\alpha+2}$. Si $\alpha = -2$, alors $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \underset{n\to\infty}{\sim} 2$, qui ne change pas de signe. Or la série $\sum 2$ diverge, d'où $u_n^{-2} - u_0^{-2} \underset{n\to\infty}{\sim} 2n$ d'après le théorème de sommation des équivalents. Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

**Exercice 11** (*Formule de Stirling*)**.** Montrer que la série $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est convergente et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln u_p$, où $u_p = \frac{(2p+1)!}{2^{2p} p!^2 \sqrt{2p+2}}$. En utilisant la formule de Stirling, déterminer un équivalent de $u_p$ et en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 - \ln \pi$.

---

La suite $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 en décroissant, donc la série $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge d'après le TSA. En séparant les termes positifs et négatifs :

$$\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{q=1}^{p} \ln\left(\frac{2q+1}{2q}\right) - \sum_{q=0}^{p} \ln\left(\frac{2q+2}{2q+1}\right) = \ln\left(\frac{3^2 \times 5^2 \times \cdots \times (2p+1)^2}{2^2 \times 4^2 \times \cdots \times (2p)^2 \times (2p+2)}\right) = 2 \ln u_p$$

en notant $u_p = \frac{3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2p) \times \sqrt{2p+2}} = \frac{\mathbf{2} \times 3 \times \mathbf{4} \times 5 \times \mathbf{6} \times \cdots (\mathbf{2p}) \times (2p+1)}{[2 \times 4 \times \cdots \times (2p)]^{\mathbf{2}} \times \sqrt{2p+2}} = \frac{(2p+1)!}{p!^2 \cdot 2^{2p} \cdot \sqrt{2p+2}}$.

En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ :

$$u_p \sim \frac{(2p+1)^{2p+1} \sqrt{2\pi(2p+1)}}{\mathrm{e}^{2p+1}} \times \left(\frac{\mathrm{e}^p}{p^p \sqrt{2\pi p}}\right)^2 \times \frac{1}{2^{2p} \sqrt{2p+2}} \sim \frac{2}{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}} \times \left(\frac{2p+1}{2p}\right)^{2p+1}.$$

On lève la forme indéterminée : $\left(\frac{2p+1}{2p}\right)^{2p+1} = \mathrm{e}^{(2p+1)\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$. D'où $u_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$. D'où $\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln u_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2 - \ln \pi$. Donc $\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2 - \ln \pi$. C'est la limite de la sous-suite des sommes partielles de rang impair. Or la suite des sommes partielles converge car on a montré que la série converge. D'où la suite des sommes partielles tend vers $-\ln \pi$. Donc $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 - \ln \pi$.