CORRIGÉ DE LA COLLE N° 00

D.L. & séries numériques

12 septembre 2024

Exercice 1. Etudier la limite $\lim\limits_{x\to\pi/6} \tan(3x)\cdot\ln(2\sin x)$.

(Merci à Alexander.)

<u>Exo 1</u> : $\tan(3x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+3u\right)$ avec $u = x-\frac{\pi}{6}$. Or $\tan\left(\frac{\pi}{2}+3u\right) = -\frac{1}{\tan 3u} = -\frac{1}{3u}+o\left(\frac{1}{u}\right)$

$\sin x = \sin\left(u+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin u + \frac{1}{2}\cos u = \frac{1}{2}\left(1+u\sqrt{3}+o(u)\right)$ donc

$\ln\left(2\sin\left(u+\frac{\pi}{6}\right)\right) = u\sqrt{3}+o(u)$ donc $\boxed{\tan(3x)\ln(2\sin x) = -\frac{1}{3u}u\sqrt{3}+o(1) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{\sqrt{3}}}$

Exercice 2. Soit un réel $x\in]0,\pi[$. Soit, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \cos^{n-1}(x)\cdot\cos\left[(n+1)x\right]$. Montrer que la série $\sum f_n(x)$ converge et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -1$.

Soit $x\in]0,\pi[$. La série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente car :

— pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \le |cos^x|^{n-1}$;

— la série $\sum|\cos x|^{n-1}$ converge car c'est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1.

<u>Première méthode</u> : Pour calculer sa somme, on remarque que : $f_n(x) = \mathrm{Re}\left(\cos^{n-1}(x)\mathrm{e}^{i(n+1)x}\right)$.

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N}\cos^{n-1}(x)\mathrm{e}^{i(n+1)x}\right)$.

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\cos^{n-1}(x)\mathrm{e}^{i(n+1)x} = \mathrm{e}^{i2x}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\left(\cos x\,\mathrm{e}^{ix}\right)^n = \mathrm{e}^{i2x}\cdot\frac{1-(\cos x)^N\mathrm{e}^{iNx}}{1-\cos(x)\mathrm{e}^{ix}} = \mathrm{e}^{i2x}\cdot\frac{1}{1-\cos(x)\mathrm{e}^{ix}}+\varepsilon_N$, où $\varepsilon_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|(\cos x)^N\mathrm{e}^{iNx}| = |\cos x|^N$ et $|\cos x|<1$ grâce à l'hypothèse $x\in]0,\pi[$.

module ↗ ↖ valeur absolue

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\cos^{n-1}(x)\mathrm{e}^{i(n+1)x} = \mathrm{e}^{i2x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x - i\sin x\cos x}+\varepsilon_N = \mathrm{e}^{i2x}\cdot\frac{1}{-i\cdot\sin x\cdot\mathrm{e}^{ix}}+\varepsilon_N = \frac{i\mathrm{e}^{ix}}{\sin x}+\varepsilon_N = \frac{-\sin x+i\cos x}{\sin x}+\varepsilon_N = -1+i\cot(x)+\varepsilon_N$.

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = -1+\mathrm{Re}(\varepsilon_N)$. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -1$.

<u>Deuxième méthode</u> (merci à Adrien D.) :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = \cos(x)^n \dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$. Cette suite (u_n) est bien définie car $\sin x \neq 0$ car $x \in]0,\pi[$.

α ~~On a~~, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n - U_{n-1} = \frac{\cos^{n-1}(x)}{\sin(x)} \left[\cos(x) \sin((n+1)x + x) - \sin(n+x) \right]$$

$$= \frac{\cos^{n-1}(x)}{\sin(x)} \left[\frac{1}{2}\left(\sin((n+3)x) + \sin((n+1)x)\right) - \sin((n+1)x) \right]$$

$$= \frac{\cos^{n-1}(x)}{\sin(x)} \left[\frac{1}{2}\left(\sin((n+3)x) - \sin((n+1)x)\right) \right]$$

$$= \frac{\cos^{n-1}(x)}{\sin(x)} \left[\sin(x) \cos((n+1)x) \right]$$

$$= \cos^{n-1}(x) \cos((n+1)x)$$

On a

$$U_0 = \cos^0(x) \times \frac{\sin((0+1)x)}{\sin(x)} = 1$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$

Notation $$\sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) = U_n - U_0, \text{ par télescopage.}$$

Or, puisque $|\cos(x)| < 1$ toujours : $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

~~On a~~ donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x) = -U_0 = -1}$$

Exercice 3. Soit $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ pour tout $n \geq 2$.

1. La suite (u_n) est-elle monotone à partir d'un certain rang ?
2. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?
3. La série $\sum (-1)^n u_n$ est-elle convergente ?

---

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$: $u_{2p+1} - u_{2p} = \frac{1}{\sqrt{2p}} - \frac{1}{\sqrt{2p+1}} > 0$, d'où la suite (u_n) n'est pas décroissante, mêem à partir d'un certain rang. Elle n'est pas non plus croissante, même à partir d'un certain rang, car $u_{2p+2} - u_{2p+1} = \frac{1}{\sqrt{2p+3}} - \frac{1}{\sqrt{2p}} < 0$.
2. $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui ne change pas de signe, d'où la série $\sum u_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc divergente.
3. On met en facteur le terme dominant : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = (1+x)^\alpha$ avec $u = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$.

   D'où (développement limité) : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n\right)$ et $(-1)^n u_n = a\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + b\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\varepsilon_n)$. Or :

   — la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le TSA car la suite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers zéro en décroissant ;

   — $\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\varepsilon_n) \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$ qui ne change pas de signe, d'où la série $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\varepsilon_n)$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$, donc convergente.

   Donc la série $\sum (-1)^n u_n$ converge car c'est une combinaison linéaire de deux séries convergentes.

   Π méthode que dans l'exo 5 du TD n°1.