CORRIGÉ DU D.M. N° 1 DE MATHÉMATIQUES

9 septembre 2024

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. On montre, de deux manières, que sa somme $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est égale à $\frac{\pi^2}{6}$.

Partie 1 :

1) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sin x \leq x \leq \tan x$.

2) Soit, pour chaque $x \in]0, \pi[$, $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cot^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cot^2 x.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit un réel α. Exprimer $\sin((2n+1)\alpha)$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

b) Montrer que, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, le réel $\cot^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}$ est une racine du polynôme

$$P(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}.$$

c) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ en fonction de n. Conclure

Partie 2 (extraite de Mines-Ponts 2023 Math 2 MP/MPI) :

4) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$\sigma : x \mapsto \sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

5) Exhiber deux nombres réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(nt) \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

6) Montrer que, si $t \in]0, \pi]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

7) Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue : si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0.$$

8) Montrer que la fonction φ définie sur $[0,\pi]$ par

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0,\pi],\ \varphi(t) = \frac{t^2-2\pi t}{4\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

9) Conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie 1 :

1) On fixe x dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et on applique le théorème des accroissements finis aux fonctions sin et tan, qui sont continues sur le segment $[0,x]$ et dérivables sur l'ouvert $]0,x[$: il existe deux réels c et c' dans $]0,x[\subset\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $\sin x-\sin 0=\cos c(x-0)$ et $\tan x-\tan 0=(1+\tan^2 c')(x-0)$, c'est-à-dire $\sin x = x\cos c$ et $\tan x = x(1+\tan^2 c')$.

Or $\cos c \leq 1$ et $1+\tan^2 c' \geq 1$, donc $\boxed{\sin x \leq x \leq \tan x}$.

2) La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ étant décroissante sur $]0,+\infty[$, l'encadrement précédent devient $\frac{1}{\tan^2 x}\leq\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{\sin^2 x}$. Comme $\frac{1}{\tan^2 x}=\cot^2 x$ et $\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$, on conclut que $\boxed{\cot^2 x\leq\frac{1}{x^2}\leq 1+\cot^2 x}$.

3) **a)** On remarque que $\sin((2n+1)\alpha)=\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{i(2n+1)\alpha}\right)$. Avec la formule du binôme de Newton, on a :
$\mathrm{e}^{i(2n+1)\alpha}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}i^k\sin^k(\alpha)\cos^{2n+1-k}(\alpha)$.

Comme $i^k=(-1)^p$ si $k=2p$ et $i^k=(-1)^p\cdot i$ si $k=2p+1$, on obtient $\boxed{\sin((2n+1)\alpha)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\sin^{2p+1}(\alpha)\cos^{2n-2p}(\alpha)}$.

b) Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\frac{k\pi}{2n+1}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\subset\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
P\left(\cot^2\frac{k\pi}{2n+1}\right) &= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\sin^{2p-2n}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\cos^{2n-2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\sin^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\cos^{2n-2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\sin^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\cdot\sin\left[(2n+1)\frac{k\pi}{2n+1}\right] \quad \text{d'après la question 3a}\\
&= \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=0
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\boxed{\text{le réel } \cot^2\frac{k\pi}{2n+1} \text{ est une racine du polynôme } P(X)}$.

c) La fonction $\tan^2$ est strictement croissante et strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction $\cot^2=\frac{1}{\tan^2}$ est strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc injective. Par conséquent, les n réels $\alpha_k=\cot^2\frac{k\pi}{2n+1}$, pour $k\in[\![1,n]\!]$, sont deux à deux distincts. Comme le polynôme P est de degré n (son coefficient d'ordre n est $a_n=(-1)^0\binom{2n+1}{1}=2n+1$),

les α_k sont <u>les</u> racines de P.
Le coefficient d'ordre $n-1$ de P est $a_{n-1} = (-1)^1\binom{2n+1}{3} = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{3!} = -\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

D'après les relations coefficients-racines, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, ce qui donne $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cot^2\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}}$.

D'après la question 2, comme, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leq n + \frac{n(2n-1)}{3} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}$$

Comme $\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{3}\frac{2n^2}{4n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$ et $\frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Partie 2 :

4) Le réel $\sigma(x)$ est défini si, et seulement si, la série $\sum \frac{x^k}{k^2}$ converge.

Si $|x| > 1$, alors $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \mathrm{e}^{k\ln|x| - 2\ln k} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$ par croissances comparées. D'où la série $\sum \dfrac{x^k}{k^2}$ diverge grossièrement.

Si $x \in [-1,1]$, alors $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$ et la série $\sum\frac{1}{k^2}$ converge d'après le critère de Riemann. D'où la série $\sum\frac{x^k}{k^2}$ converge absolument.

Donc $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } \sigma \text{ est } [-1,1].}$

5) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On note $P = \alpha X^2 + \beta X$. Ainsi $P' = 2\alpha X + \beta$ et $P'' = 2\alpha$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut intégrer par parties (car les fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_0^\pi P(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \left[P(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi P'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t = 0 + \left[P'(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi P''(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t$$

or $\displaystyle\int_0^\pi P''(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t = \left[2\alpha\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^\pi = 0$ et $\displaystyle\left[P'(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^nP'(\pi) - P'(0)}{n^2}$ d'où

$$\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n(2\pi\alpha+\beta) - \beta}{n^2}$$

En choisissant $\beta = -1$ et $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$, on obtient $(-1)^n(2\pi\alpha+\beta) - \beta = 1$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$$

6) Soit $t \in]0,\pi]$. Alors $\sin\frac{t}{2} \neq 0$. Par récurrence :

- Initialement, $\sin\left(t + \frac{t}{2}\right) = \sin\frac{t}{2}\cos t + \sin t\cos\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}\cos t + 2\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}$, d'où

$$\frac{\sin\left(\frac{3t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right) = \cos t = \sum_{k=1}^{1}\cos(kt).$$

- Supposons que l'égalité soit vraie à un rang n. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} + \cos((n+1)t) = \frac{\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos((n+1)t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Or $\sin\left((n+1)t-\frac{t}{2}\right)=\sin((n+1)t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)-\cos((n+1)t))\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ donc

$$\begin{aligned}\sin\left((n+1)t-\tfrac{t}{2}\right)+2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos((n+1)t) &= \sin((n+1)t)\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)+\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos((n+1)t)\\ &= \sin\left((n+1)t+\tfrac{t}{2}\right)\\ &= \sin\left(\tfrac{(2n+3)t}{2}\right)\end{aligned}$$

D'où l'égalité au rang $n+1$.

- On conclut que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}}$$

7) Soit un réel $x>0$. On effectue une intégration par parties avec les fonctions φ et $t\mapsto\dfrac{-\cos(xt)}{x}$ qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_0^\pi\varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=\left[\varphi(t)\frac{-\cos(xt)}{x}\right]_0^\pi+\int_0^\pi\varphi'(t)\frac{\cos(xt)}{x}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\varphi(0)-\frac{1}{x}\varphi(\pi)\cos(\pi x)+\frac{1}{x}\int_0^\pi\varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t.$$

- Le premier terme tend vers 0 si x tend vers $+\infty$.
- Le deuxième aussi d'après le théorème des gendarmes car

$$0\leq\frac{1}{x}\left|\varphi(\pi)\cos(\pi x)\right|\leq\frac{1}{x}\left|\varphi(\pi)\right|.$$

- Enfin $\left|\int_0^\pi\varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^\pi\left|\varphi'(t)\cos(xt)\right|\mathrm{d}t\leq\int_0^\pi\left|\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t$ qui est une constante K ne dépendant plus de x. Ainsi $0\leq\frac{1}{x}\left|\int_0^\pi\varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{K}{x}$. D'après le théorème des gendarmes, $\frac{1}{x}\int_0^\pi\varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$ tend vers 0.

On a ainsi prouvé le lemme de Riemann-Lebesgue.

8) La fonction φ est continue en 0 car $\varphi(t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{-2\pi t}{2\pi t}\xrightarrow[t\to0]{}-1=\varphi(0)$. Elle est dérivable sur $]0,\pi]$ et

$$\forall t\in]0,\pi],\varphi'(t)=\frac{(2t-2\pi)\sin(t/2)-(1/2)(t^2-2\pi t)\cos(t/2)}{4\pi\sin^2(t/2)}=\frac{4(t-\pi)\sin(t/2)-(t^2-2\pi t)\cos(t/2)}{8\pi\sin^2(t/2)}.$$

Quand t tend vers 0,

$$4(t-\pi)\sin\frac{t}{2}-(t^2-2\pi t)\cos\frac{t}{2}=4(t-\pi)\left(\frac{t}{2}+o\left(t^2\right)\right)-(t^2-2\pi t)\left(1+o(t)\right)=t^2+o(t^2)\sim t^2$$

d'où $\varphi'(t)\sim\dfrac{t^2}{8\pi(t/2)^2}\xrightarrow[t\to0]{}\dfrac{1}{2\pi}$. Le théorème de la limite de la dérivée s'applique, donc φ est dérivable en 0, $\varphi'(0)=\dfrac{1}{2\pi}$ et φ' est continue en 0. Or φ' est continue aussi sur $]0,\pi]$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi].}$

9) D'après la question 5, $\sigma(1)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}S_n$, où

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t=\int_0^\pi\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^\pi\frac{t^2-2\pi t}{4\pi}\mathrm{d}t$$

d'après la question 6. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question 8, d'où le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique :

$$\int_0^\pi\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

donc $S_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0-\displaystyle\int_0^\pi\frac{t^2-2\pi t}{4\pi}\mathrm{d}t=\left[\frac{3\pi t^2-t^3}{12\pi}\right]_0^\pi=\frac{3\pi^3-\pi^3}{12\pi}$ Donc $\boxed{\sigma(1)=\dfrac{\pi^2}{6}}$