Kdo du 13/09/2024

Séries numériques

Exercice 1. Soit $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\phi(n)}{n^2}$?

Remarquons que pour $\phi = id_{\mathbb{N}^*}$, on retrouve la série harmonique qui diverge. Pour montrer la divergence pour un ϕ quelconque on procède de la même manière et on considère la différence de sommes partielles $S_{2n} - S_n$:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\phi(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{n} \phi(k)$$

Or ϕ est injective (car elle est bijective), donc elle ne prend pas deux fois la même valeur :

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4n^2}(1+2+\cdots+n) \geq \frac{n(n+1)}{8n^2} \geq \frac{1}{8}$$

Par conséquent, $S_{2n} - S_n$ ne peut pas tendre vers 0 donc la série diverge.

Exercice 2 (Lemme de condensation)**.** Soit u_n une suite qui tend vers zéro en décroissant.

1. Soient, pour chaque $n \geq 2$, les suites $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \quad$ et $\quad T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k u_{2^k}$.

   Montrer que : $\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{2} T_n \leq S_{2^n} \leq T_n$.
2. Montrer que les séries $\sum u_k$ et $\sum 2^k u_{2^k}$ sont de même nature.
3. En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln n)}$.

1.
$$\begin{aligned} S_{2^n} &= \sum_{k=2}^{2^n} u_k \\ &= (u_2) + (u_3+u_4) + (u_5+u_6+u_7+u_8) + \cdots + (\cdots + u_{2^n}) \\ &\geq \frac{1}{2} T_n \quad \text{car la suite } u_k \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= \sum_{k=2}^{2^n} u_k \\ &= (u_2+u_3) + (u_4+u_5+u_6+u_7) + (u_8+\cdots) + \cdots + u_{2^n} \\ &\leq (u_2+u_3) + (u_4+u_5+u_6+u_7) + (u_8+\cdots) + \cdots + (u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}) \\ &\leq T_n \quad \text{car la suite } u_k \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

2. La suite S_n est croissante (car la suite u_k est positive), elle a donc une limite : ou bien $+\infty$ (elle diverge et elle n'est pas majorée), ou bien un réel (elle converge et elle est majorée). De même pour la suite T_n.

   Si la série $\sum u_k$ diverge, alors la suite S_n tend vers $+\infty$, d'où la suite extraite S_{2^n} tend vers $+\infty$. Or $S_{2^n} \leq T_n$. D'où T_n tend vers $+\infty$. Donc la série $\sum 2^k u_{2^k}$ diverge.

   Si la série $\sum 2^k u_{2^k}$ diverge, alors la suite T_n tend vers $+\infty$. Or $\frac{1}{2} T_n \leq S_{2^n}$. D'où la suite S_{2^n} tend vers $+\infty$. D'où la suite S_n diverge. Donc la série $\sum u_k$ diverge.

   Donc les séries $\sum u_k$ et $\sum 2^k u_{2^k}$ sont de même nature.

3. La suite $\left(\frac{1}{n\cdot\ln(n)}\right)$ tend vers zéro en décroissant. La série $\sum\frac{1}{n\cdot\ln(n)}$ est de même nature que la série $\sum 2^k\frac{1}{2^k\ln(2^k)} = \frac{1}{\ln 2}\sum\frac{1}{k}$. Or la série $\sum\frac{1}{k}$ diverge. Donc la série $\sum\frac{1}{n\cdot\ln(n)}$ diverge aussi.

   Autre méthode : comparer la série $\sum\frac{1}{n\cdot\ln(n)}$ et l'intégrale $\int\frac{1}{x\cdot\ln(x)}\,dx$.

4. La suite $\left(\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln n)}\right)$ tend vers zéro en décroissant. La série $\sum\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln n)}$ est de même nature que la série $\sum 2^k\frac{1}{2^k\ln(2^k)\ln(\ln(2^k))}$. Or $2^k\frac{1}{2^k\ln(2^k)\ln(\ln(2^k))} = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{k\ln(k\ln 2)} = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{k(\ln k+\ln\ln 2)} \sim \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{k\ln k}$. La série $\sum\frac{1}{k\ln k}$ diverge. Donc la série $\sum\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln n)}$ diverge aussi.

   Autre méthode : comparer série et intégrale.