Corrigé du D.S. n° 1 de mathématiques

— Exercice 1 —

1) Si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{n}$, donc la série $\sum u_n$ diverge.

2) Si $\alpha > 0$, alors la fonction $[0, +\infty[,\ x \mapsto x^\alpha$ est croissante, d'où (faire un dessin) :

$$\int_0^n x^\alpha\, dx \leq 1 + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \leq \int_1^{n+1} x^\alpha\, dx.$$

D'où :

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq 1 + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}.$$

On divise par $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$:

$$1 \leq \frac{1 + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}/(\alpha+1)} \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{n^{\alpha+1}}.$$

D'où (théorème des gendarmes) :

$$1 + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

$\frac{1}{u_n} \sim \dfrac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ qui ne change pas de signe et la série $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge (car $\alpha + 1 > 1$), donc la série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge.

3) On peut le démontrer par récurrence. Autre méthode, pour calculer $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n k^2$, on calcule de deux manières la quantité $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3$:

- d''une part (télescope), $v_n = (n+1)^3 - 1$;
- d'autre part (binôme de Newton), $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, d'où $v_n = 3\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 + 3\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$.

  D'où $(n+1)^3 - 1 = 3u_n + 3\dfrac{n(n+1)}{2} + n$, donc $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4) On cherche a, b et c tels que $\dfrac{6}{x(x+1)(2x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{2x+1}$ et on trouve $a = 6$, $b = 6$ et $c = -24$. D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} &= 6\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 6\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 24\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \\
&= 6H_n + 6\left(H_n - 1 + \frac{1}{n+1}\right) - 24\left(H_{2n+1} - 1 - \frac{1}{2}H_n\right) \\
&= 18 + 24H_n - 24H_{2n+1} + \frac{6}{n+1}.
\end{aligned}$$

5) ▷ **exercice 4 du chapitre I**. Comme dans l'exercice du cours, montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ est décroissante et qu'elle est minorée. On en déduit qu'elle est convergente.

6) On sait que $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$, où γ est la constante d'Euler et $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} &= 18 + 24\left[\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n\right] - 24\left[\ln(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1}\right] + \frac{6}{n+1} \\
&= 18 - 24\ln\frac{2n+1}{n} + 24(\varepsilon_n - \varepsilon_{2n+1}) + \frac{6}{n+1} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 18 - 24\ln(2)
\end{aligned}$$

— Exercice 2 —

(Séries oscillantes, tiré de *EMLyon 2022*)

1) Soit $\mu \neq \lambda$: pour tout n, $u_n(\mu) = u_n(\lambda) + \frac{\mu-\lambda}{n}$. Or la série $\sum u_n(\lambda)$ converge et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.

2) **a)** $S_{(m+1)d} - S_{md} = \displaystyle\sum_{k=md+1}^{md+d} \frac{\omega_k}{k} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\omega_k}{md+k}$ car la suite (ω_n) est d−périodique.

D'où $S_{(m+1)d} - S_{md} = \displaystyle\frac{1}{md}\sum_{k=1}^{d} \frac{\omega_k}{1+\frac{k}{md}}$. Or $\frac{1}{1+\frac{k}{md}} = 1 - \frac{k}{md} + \underset{m\to\infty}{o}\left(\frac{1}{m}\right)$.

Donc $S_{(m+1)d} - S_{md} = \displaystyle\frac{\alpha}{md} + \frac{\beta}{m^2d^2} + \underset{m\to\infty}{o}\left(\frac{1}{m^2}\right)$, où $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{d}\omega_k$ et $\boxed{\beta = -\displaystyle\sum_{k=1}^{d} k\omega_k}$.

b) Si $\alpha \neq 0$, alors $S_{(m+1)d} - S_{md} \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{\alpha}{m}$, or $\frac{1}{m}$ ne change pas de signe et la série $\sum \frac{1}{m}$ diverge, donc la série $\sum\left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ diverge aussi.
Si $\alpha = 0$, alors $S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{\beta}{m^2d^2} + \underset{m\to\infty}{o}\left(\frac{1}{m^2}\right) = \underset{m\to\infty}{o}\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right)$, or $\frac{1}{m^{3/2}}$ ne change pas de signe et la série $\sum \frac{1}{m^{3/2}}$ converge, donc la série $\sum\left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ converge aussi.

Finalement, $\boxed{\text{la série } \sum\left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right) \text{ converge si, et seulement si, } \displaystyle\sum_{k=1}^{d}\omega_k = 0.}$

c) Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des sommes partielles converge. En particulier, la suite extraite $(S_{md})_{m\geq 1}$ converge. La série télescopique $\sum\left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ a la même nature que la suite $(S_{md})_{m\geq 1}$, donc elle converge.

d) Si la série télescopique $\sum\left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ converge, alors la suite $(S_{md})_{m\geq 1}$ aussi, vers une limite qu'on note ℓ. Or, pour tout $i \in [\![1, d-1]\!]$, $S_{md+i} = S_{md} + \displaystyle\sum_{k=1}^{i} \frac{\omega_{md+k}}{md+k}$ tend aussi vers ℓ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} \frac{\omega_{md+k}}{md+k} = \sum_{k=1}^{i} \frac{\omega_k}{md+k} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des sommes partielles converge, donc la série $\sum u_n$ converge.

3) La suite $(\omega_n + \lambda)$ est $d-$périodique. De la question précédente, on déduit qu'elle converge si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{d}(\omega_k + \lambda) = 0$, ce qui équivaut à $\boxed{\lambda = -\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\omega_k.}$

4) **a)** La suite (T_n) est $d-$périodique, donc bornée.

b)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k - T_{k-1}}{a_k} \quad \text{(télescope et } T_0 = 0\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{k-1}}{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k}{a_{k+1}} \quad \text{(changement d'indice et } T_0 = 0\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{T_n}{a_{n+1}}.
\end{aligned}
$$

c) Notons M un majorant de $|T_n|$, qui existe car la suite (T_n) est bornée.
D'une part la suite $\left(\frac{T_n}{a_{n+1}}\right)$ tend vers 0 car $0 \leq \left|\frac{T_n}{a_{n+1}}\right| \leq \frac{M}{a_{n+1}}$ qui tend vers 0.
D'autre part $0 \leq \left|T_k\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right| \leq M\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$ et la série télescopique $\sum\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge car elle est de même nature que la suite $\left(\frac{1}{a_k}\right)$.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge.}}$

— Problème —

(Vitesse de convergence, extrait de *Centrale PC 2017 Math 2*)

1) **a)** La suite (u_n) définie par $u_{2k} = u_{2k+1} = \frac{1}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, est dans E (puisqu'elle converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0), mais pas dans E^c. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 2k \\ \frac{1}{k+1} \text{ si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k}^c = 1 \neq 0 = \lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k+1}^c$, ce qui montre que la suite (u_n^c) diverge.

$\boxed{\text{L'ensemble } E^c \text{ est donc strictement inclus dans } E}$.

b) La preuve qui suit s'inspire de celle du critère de d'Alembert ▷ **preuve du théorème 10 du chapitre I**. Comme $(u_n) \in E^c$, on a $\ell^c \geq 0$ (en tant que limite d'une suite à termes positifs).
Supposons, par l'absurde, que $\ell^c > 1$. Alors, en notant $v_n = |u_n - \ell|$:

$$\exists \lambda > 1, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq \lambda$$

D'où, pour tout $n > N$, $v_n = v_N \times \frac{v_{N+1}}{v_N} \times \cdots \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \geq v_N \times \lambda^{n-N}$
Comme $v_N > 0$ et $\lambda^{n-N} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par comparaison, ce qui est contradictoire avec la convergence de (u_n) vers ℓ. L'hypothèse est donc absurde et $\boxed{\ell^c \text{ appartient au segment } [0,1]}$.

2) **a)**

- La suite $(u_n) = \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)$ converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0, donc $(u_n) \in E$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

  Donc $\boxed{(u_n) \text{ appartient à } E^c\text{, avec } \ell^c = 1\text{, et la convergence est lente}}$.

- La suite $(v_n) = (n^k q^n)$ converge vers $\ell = 0$ (par croissances comparées) et ne vaut jamais 0 pour $n \geq 1$, donc $(v_n) \in E$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n^c = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k q \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q$$

  Donc $\boxed{(v_n) \text{ appartient à } E^c\text{, avec } \ell^c = q \in]0,1[\text{, et la convergence est géométrique de rapport } q}$.

- La suite $(w_n) = (\frac{1}{n!})$ converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0, donc $(w_n) \in E$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n^c = \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Donc $\boxed{(w_n) \text{ appartient à } E^c\text{, avec } \ell^c = 0\text{, et la convergence est rapide}}$.

b) **i)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mathrm{e}^{2^n \ln(1+2^{-n})}$, et comme $2^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut écrire, au voisinage de ∞ :

$$v_n = \mathrm{e}^{2^n\left(2^{-n}-\frac{1}{2}(2^{-n})^2+o((2^{-n})^2)\right)} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-2^{-n-1}+o(2^{-n})} = \mathrm{e} \times \left(1 - 2^{-n-1} + o(2^{-n})\right)$$

Par conséquent, $\boxed{\text{au voisinage de } \infty,\ v_n = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)}$.

ii) La suite (v_n) converge vers $\ell = \mathrm{e}$ et $v_n - \mathrm{e} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{e}}{2^{n+1}} < 0$, donc $v_n < \mathrm{e}$ à partir d'un certain rang. Ceci montre que $(v_n) \in E$. De plus,

$$v_n^c = \frac{|v_{n+1} - \mathrm{e}|}{|v_n - \mathrm{e}|} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}/2^{n+2}}{\mathrm{e}/2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartient à } E^c \text{ et sa vitesse de convergence est géométrique de rapport } \frac{1}{2}}$.

c) **i)** Cela résulte d'une comparaison série-intégrale : comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

En sommant pour k variant de $n+1$ à $N > n$, on obtient :

$$\forall (n, N) \in \mathbb{N}^2, \quad N > n \geq 1, \quad \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

L'encadrement précédent s'écrit :

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Les inégalités larges passent à la limite, donc, en faisant tendre N vers ∞, on obtient (puisque $1 - \alpha < 0$) l'encadrement :

$$\frac{-(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{-n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

C'est-à-dire $\boxed{\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}}$.

ii) La suite (S_n) est strictement croissante et converge vers ℓ, donc $S_n < \ell$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(S_n) \in E$. De plus, $S_n^c = \frac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n}$, donc, en utilisant les inégalités précédentes :

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+2)^{\alpha-1}} \leq S_n^c \leq 1$$

D'après le théorème des gendarmes, $S_n^c \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par conséquent $\boxed{(S_n) \text{ appartient à } E^c \text{ et possède une vitesse de convergence lente}}$.

3) **a)** Puisque $(u_n) \in E$ et que la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre $r > 1$, il existe une constante $M > 0$ et un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} \leq M$. On a donc, en multipliant cette inégalité par $|u_n - \ell|^{r-1}$:

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| \leq M|u_n-\ell|^{r-1}$$

Comme $r-1>0$ et que $u_n - \ell \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient, par le théorème d'encadrement, $\left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que $\boxed{\text{la convergence de la suite } (u_n) \text{ est rapide}}$.

b) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

i) La suite $(\frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et $\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est donc convergente, ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ converge}}$.

On note s sa limite.
Comme la suite (S_n) est strictement croissante, $S_n < s$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci montre que $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ appartient à } E}$.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $s - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

- Comme il s'agit d'une somme de termes positifs, elle est supérieure à son premier terme, ce qui donne l'inégalité $s - S_n \geq \frac{1}{(n+1)!}$
- De plus, en factorisant par $\frac{1}{(n+1)!}$, on a :

$$s - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\prod\limits_{j=2}^{k+1}(n+j)}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\prod\limits_{j=2}^{k+1}(n+j) \geq \prod\limits_{j=2}^{k+1} 2 = 2^k$, donc $s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \frac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}}$.

iii) Comme la série géométrique $\sum \frac{1}{2^k}$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, l'encadrement précédent s'écrit $\frac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \frac{2}{(n+1)!}$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\frac{S_{n+1}-s}{S_n-s}\right| \leq \frac{2}{n+2}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\left|\frac{S_{n+1}-s}{S_n-s}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui démontre que

$\boxed{\text{la convergence de la suite } (S_n) \text{ est rapide}}$.

iv) Supposons, par l'absurde, que la convergence de la suite (S_n) soit d'ordre $r > 1$. Il existe alors une constante $M > 0$ et un entier naturel n_0 tels que :

$$\forall n \geq n_0, \quad |S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r$$

Les encadrements précédemment établis impliquent :

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq |S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r \leq M\frac{2^r}{((n+1)!)^r}$$

Et donc, pour tout $n \geq n_0$, $((n+1)!)^{r-1} \leq M2^r(n+2)$. Mais ceci est impossible, puisque $n+2$ est négligeable devant $((n+1)!)^{r-1}$ (vu que $r-1>0$).
Par conséquent, l'hypothèse est absurde et

$\boxed{\text{la convergence de la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vers } s \text{ n'est pas d'ordre } r}$.

c) **i)** Comme $f(I) \subset I$, la suite (u_n) est bien définie. La fonction f étant dérivable en $\ell \in I$, elle y est continue. Par conséquent, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Comme la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ, on obtient $\boxed{f(\ell) = \ell}$, par unicité de la limite.

ii) Supposons, par l'absurde, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \ell$. Comme $f(\ell) = \ell$, une récurrence montre que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \ell$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, ce qui est absurde. Par conséquent, la suite (u_n) est dans E.
De plus, f étant dérivable en ℓ et la fonction $t \mapsto |t|$ étant continue en $f'(\ell)$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right| = \left|\frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |f'(\ell)|$$

Ceci montre que :

$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ appartient à } E^c \text{ et que sa vitesse de convergence est donnée par } \ell^c = |f'(\ell)|}$.

iii) Par l'absurde, supposons (u_n) non stationnaire. Alors, d'après la question précédente, la suite (u_n) est dans E^c et $\ell^c = |f'(\ell)| > 1$, ce qui contredit le résultat de la question 1(c).

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est nécessairement stationnaire}}$.

iv) Comme on suppose ici (u_n) non stationnaire, la suite (u_n) est dans E d'après la question 3(c)ii et le quotient $\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{|f(u_n)-f(\ell)|}{|u_n-\ell|^r}$ est alors bien défini.

- Supposons que, pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, $f^{(k)}(\ell) = 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I, elle admet alors un développement limité à l'ordre r en ℓ d'après le théorème de Taylor-Young et on a, comme $u_n - \ell \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{|f(u_n) - f(\ell)|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{\left|\frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}(u_n - \ell)^r + o((u_n - \ell)^r)\right|}{|u_n - \ell|^r} = \left|\frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}\right| + o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left|\frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}\right|$$

Étant convergente, la suite $\left(\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r}\right)$ est bornée, donc la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre r.

- Supposons le contraire, c'est-à-dire que l'ensemble $\{k \in [\![1, r-1]\!],\ f^{(k)}(\ell) \neq 0\}$ est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet alors un minimum j et on a :

$$\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{|f(u_n) - f(\ell)|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{\left|\frac{f^{(j)}(\ell)}{j!}(u_n - \ell)^j + o((u_n - \ell)^j)\right|}{|u_n - \ell|^r} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\left|\frac{f^{(j)}(\ell)}{j!}\right|}{|u_n - \ell|^{r-j}}$$

  Comme $r - j > 0$ et $f^{(j)}(\ell) \neq 0$, on a $\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, et donc la vitesse de convergence de (u_n) n'est pas d'ordre r.

Finalement,

$$\boxed{\text{la vitesse de convergence de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est d'ordre } r \text{ si, et seulement si, } \forall k \in [\![1, r-1]\!],\ f^{(k)}(\ell) = 0}.$$