Colle n° 01

Séries numériques

Exercice 1 (Les séries de Bertrand).
Soient α et β deux réels strictement positifs.

1. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
2. On suppose que $\alpha > 1$.
   (a) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
   (b) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
3. On suppose que $\alpha \leq 1$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
4. On suppose que $\alpha < 1$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
5. (a) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ est-elle convergente ?
   (b) Pour quelles valeurs de β la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge-t-elle ?

Exercice 2. Soit (u_n) une suite strictement positive telle que la série $\sum u_n$ diverge.

Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge, où l'on note $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(Une indication ? Étudier $\displaystyle\ln \frac{S_{n-1}}{S_n}$.)