D.M. N° 2 DE MATHÉMATIQUES

Ce D.M. contient un problème d'analyse et un autre d'algèbre.

PROBLÈME 1 : d'une étude des intégrales de Wallis à la question 1 et d'un développement asymptotique de $\ln n!$ à la question 2, on déduit la formule de Stirling à la question 3.

1) On pose, pour chaque entier naturel n,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n \, d\theta.$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $I_n = (n-1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2}(\cos\theta)^2 \, d\theta$.

b) En déduire la relation de récurrence $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

d) En déduire que $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Montrer que la suite (nI_nI_{n-1}) est constante et calculer cette constante.

f) En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

g) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

h) En déduire un équivalent de $\dfrac{(2k)!}{(k!)^2}$.

2) Prouver l'un après l'autre les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(a)} & \ln(n!) & = & n\ln n + o(n\ln n) \\
\text{(b)} & & = & n\ln n - n + o(n) \\
\text{(c)} & & = & n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + o(\ln n) \\
\text{(d)} & & = & n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + K + o(1) \\
\text{(e)} & & = & n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + K + \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)
\end{array}$$

où K est un réel, déterminé à la question suivante.

3) En déduire la formule de Stirling.

PROBLÈME 2 : en étudiant les formes linéaires sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,
on se propose de montrer que tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible.
Et que la trace est, à un facteur près, l'unique forme linéaire f sur E telle que $f(M \cdot N) = f(N \cdot M)$.

Notations :

- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- E désigne l'ensemble $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E est noté E^* et est appelé le dual de E.
- $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de E.
- Pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, on note J_r la matrice $\sum\limits_{i=1}^{r} E_{i,i}$.
- Pour chaque $A \in E$, on définit la forme linéaire $T_A \in E^*$ par $T_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$. Et l'ensemble H_A par $H_A = \{M \in E \mid \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.

On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant, qui est au programme de la première année :

Si $A \in E$ est de rang $r \in [\![1, n]\!]$, alors il existe deux matrices inversibles U et V de E telles que $UAV = J_r$.

1) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et on note $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in E$.

a) Montrer que H_A est un hyperplan de E. Déterminer une équation et une base de H_A.

b) Exhiber une matrice inversible M appartenant à H_A.

2) **a)** Soit $A = (a_{k,l})_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$ une matrice de E. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $T_A(E_{i,j})$.

b) En déduire que, pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe une unique matrice A de E telle que $f = T_A$.

c) En utilisant l'application $\varphi : E \to E^*, \ A \mapsto T_A$, déterminer la dimension du dual E^*.

3) On considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de E.

a) Vérifier que P est inversible et que, pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, la matrice P appartient à H_{J_r}.

b) En déduire que chaque hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

4) Soit une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f(M \cdot N) = f(N \cdot M)$ pour toutes matrices M et N de E. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $f = \lambda \operatorname{tr}$.