D.S. n$^{\text{o}}$ 1 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

— Exercice 1 —

Soient un réel α et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = 1 + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha.$$

1) Soit $\alpha \leq 0$. La série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge-t-elle ?

2) Soit $\alpha > 0$. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini et en déduire que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge.

Dans la suite de l'exercice, $\alpha = 2$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = 18 + 24H_n - 24H_{2n+1} + \frac{6}{n+1}.$$

5) Montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ converge. On notera γ sa limite.

6) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2} = 18 - 24\ln(2)$.

— Exercice 2 —

Soit d un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(\omega_n)_{n\geq 1}$ une suite de complexes, périodique de période d, c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \omega_{n+d} = \omega_n.$$

On s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n},$$

pour tout $n \geq 1$, où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geq 1$.

1) Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge. Montrer que, pour toute valeur complexe $\mu \neq \lambda$, la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.

2) Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{k}.$$

a) Montrer qu'il existe un ~~réel~~ complexe β, que l'on déterminera, tel que :

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{\sum_{k=1}^{d} \omega_k}{md} + \frac{\beta}{m^2 d^2} + \underset{m\to\infty}{o}\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la suite (ω_n) pour que la série $\sum \left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ converge.

c) Montrer que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire pour que la série $\sum u_n$ converge.

d) Montrer que cette condition est suffisante.

3) Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge.

4) **Une généralisation.** On se donne une suite croissante $(a_n)_{n\geq 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

On suppose que la suite $d-$périodique (ω_n) est telle que $\sum_{k=1}^{d} \omega_k = 0$. On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \quad \text{ et } T_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$

Par souci de commodité, on note également $T_0 = 0$.

a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{T_n}{a_{n+1}}.$$

c) Montrer que la série $\sum u_k$ converge.

— Problème —

Définitions et notations

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles.
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqslant N, \quad u_k \neq \lim_{n\to\infty} u_n$$

- À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et de limite égale à ℓ, on associe la suite (u_n^c) définie à partir d'un certain rang par

$$u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$$

- E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tels que la suite (u_n^c) soit convergente.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de la suite (u_n^c) ; on dit que *la vitesse de convergence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
  - *lente* si $\ell^c = 1$,
  - *géométrique* de rapport ℓ^c si $\ell^c \in]0,1[$,
  - *rapide* si $\ell^c = 0$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ, et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est *d'ordre* r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\frac{u_{n+1}-\ell}{|u_n-\ell|^r}$ est bornée.
- On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire* lorsque : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0}$.

1) Des résultats généraux

a) Montrer que E^c est strictement inclus dans E. (On pourra utiliser la suite définie par $u_{2k} = u_{2k+1} = \frac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.)

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E^c. Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0,1]$.

2) Exemples de calcul de vitesse de convergence

a) Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.
Montrer que les suites $\left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence. (On commencera par montrer qu'elles appartiennent à E.)

b) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

i) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

ii) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E. Montrer qu'elle appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

c) Soit α un réel strictement supérieur à 1.
On note ℓ la somme de la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

i) Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

ii) Établir que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E, puis qu'elle appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

3) Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r, où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

b) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

i) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E. On note s la limite de cette suite.

ii) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant s - S_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

iii) En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

iv) Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r.

c) On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ.

i) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

ii) Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire, alors elle appartient à E, et aussi à E^c. Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

iii) Montrer que, si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

iv) Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.
Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'ordre r si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, r-1]\!],\ f^{(k)}(\ell) = 0$$