Chapitre III Intégrer sur un intervalle

Table des matières

III.1 Intégrer une fonction continue par morceaux sur un segment

Se rappeller que :

1. Toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue sur un segment $[a, b]$ possède une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
2. Une fonction f est **continue par morceaux** sur un segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et en x_i. On dit alors que la subdivision du segment $[a, b]$ est adaptée à la fonction f.

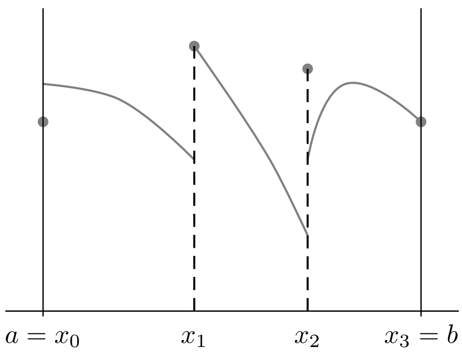

Figure III.1 – Un exemple de fonction *cpm*

Autrement dit : la restriction de f à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction f_i continue sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$.

3. On définit l'intégrale de la fonction f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ par :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1}, x_i]} f_i,$$

chacune des intégrales de la somme étant l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, ce qui nous ramène au point 1. Il existe plusieurs subdivisions adaptées à la même fonction f mais on vérifie, grâce à a relation de Chasles, que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la subdivision.

Remarque 1 (intégrale & primitive) — *On dit qu'une fonction F est* ***une primitive*** *de f si F est dérivable et si f est la dérivée de F. Se rappeler le théorème suivant :*

Si f est continue sur un intervalle I tel que $a \in I$, alors la fonction F définie, pour tout $x \in I$, par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f : F est dérivable et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

III.2 Qu'est-ce qu'une intégrale généralisée ?

Définition 2
Une fonction est *cpm* sur un intervalle I si elle est *cpm* sur chaque segment inclus dans I.

Si une fonction f est *cpm* sur un intervalle I, on peut ainsi l'intégrer sur tout segment inclus dans cet intervalle I. On va maintenant essayer d'intégrer f sur un intervalle plus général qu'un segment : $[a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$ ou $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, b[$ ou $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$. On parle alors d'intégrale généralisée ou d'intégrale impropre. Par exemple,

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{[0,1[} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \int_{[1,+\infty[} \frac{1}{t^2}\,dt.$$

Définition 3
Soit f une fonction *cpm* sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit, pour chaque $x \in [a, b[$, $F(x) = \displaystyle\int_{[a,x]} f$. On dit que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge en b si la limite $\displaystyle\lim_{x \to b^-} F(x)$ existe et est finie. Sinon, on dit qu'elle diverge en b.

L'intégrale I est appelée une intégrale *généralisée en b* ou *impropre en b*. On définit de même si l'intégrale $\displaystyle\int_{]a,b]} f$ d'une fonction f *cpm* sur un intervalle $]a, b]$ (où $-\infty \leq a < b < +\infty$) converge ou diverge en a.

Exemple 4 —

1. *Pour tout $x \in [0, 1[$,*
   $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, *donc l'intégrale* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, *qui est impropre en* 0, *converge et* $I = \dfrac{\pi}{2}$.

2. $$\boxed{\text{\textit{L'intégrale} } \int_0^1 \ln(t)\,dt \text{ \textit{est convergente en} } 0.}$$

   Preuve — $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt = \int_{]0,1]} \ln(t)\,dt$. *On calcule, pour tout $x > 0$,* $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$ *et on étudie la limite de F en 0^+ :* $F(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1$, *donc l'intégrale converge et est égale à* -1. □

3. $$\boxed{\text{\textit{L'intégrale} } \int_0^{+\infty} e^{Kt}\,dt \text{ \textit{converge en} } +\infty \text{ \textit{si, et seulement si,} } K < 0.}$$

   Preuve — *On calcule, pour tout $x > 0$,*

   $$G(x) = \int_0^x e^{Kt}\,dt = \begin{cases} \dfrac{e^{Kx} - 1}{K} & \text{si } K \neq 0 \\ x & \text{si } K = 0 \end{cases}$$

et on étudie la limite de G en $+\infty$:

$$G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -1/K \text{ si } K<0 \\ +\infty \text{ si } K \geq 0 \end{cases} .$$

□

REMARQUE 5 — *Si f est cpm sur un intervalle $]a,b[$ (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), alors on commence par choisir un $c \in]a,b[$ et on dit que : l'intégrale $\int_{]a,b[} f$ converge si, et seulement si, les deux intégrales $\int_{]a,c]} f$ et $\int_{[c,b[} f$ convergent. Dans ce cas, $\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$. Ni la nature (convergente ou divergente) ni la valeur de l'intégrale ne dépendent du choix de c.*

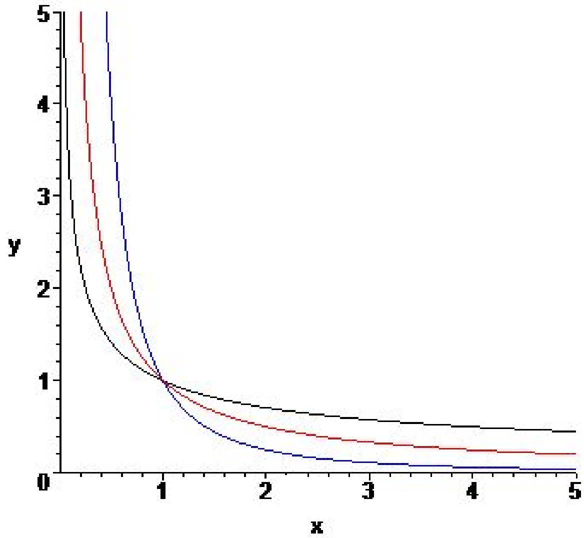

FIGURE III.2 – LES COURBES D'ÉQUATIONS $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ ET $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 6 — *Soit un réel α. Montrer que :*

1. ***(critère de Riemann en $+\infty$)*** *l'intégrale $\displaystyle\int_7^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge ssi $\alpha > 1$ (comme pour les séries) ;*
2. ***(critère de Riemann en 0)*** *l'intégrale $\displaystyle\int_0^{13} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge ssi $\alpha < 1$;*
3. *l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

REMARQUE 7 — *La divergence grossière des séries $\left(u_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Longrightarrow \sum u_n \text{ diverge}\right)$ n'est pas valable pour les intégrales, comme le montre la fonction représentée sur la figure ci-dessous : cette fonction f est continue, $f(x) \underset{x\to\infty}{\not\to} 0$ mais l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. (Pourquoi ?)*

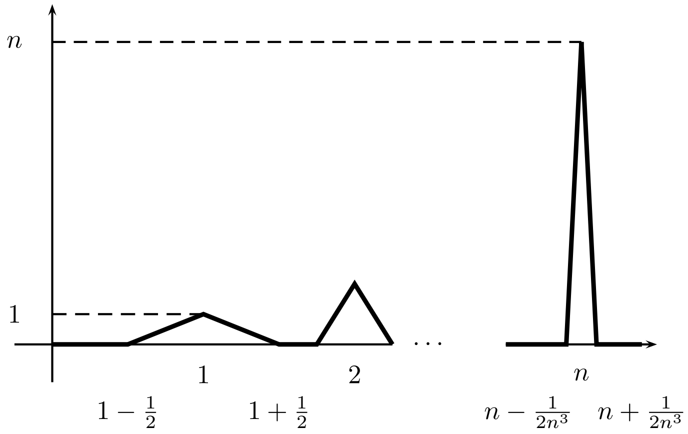

FIGURE III.3 – Pas de divergence grossière pour les intégrales généralisées

> PROPOSITION 8 (intégrales faussement impropres)
> Soient a et b deux réels. Si une fonction $f\ :]a,b]\to\mathbb{R}$ est continue sur $]a,b]$ et possède une limite finie en a^+, alors son intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge en a.

Preuve — La fonction f possède un prolongement par continuité $\tilde{f}\ :\ [a,b]\to\mathbb{R},\ t\mapsto \begin{cases} f(t) \text{ si } t\neq a \\ \lim\limits_{a^+} f \text{ si } t=a \end{cases}$.

Or, pour tout $x\in]a,b]$, $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt=\int_x^b \tilde{f}(t)\,dt=F(b)-F(x)$, où F est une primitive de $\tilde{f}$ sur $[a,b]$. Et $F(x)\underset{x\to a^+}{\longrightarrow}F(a)$ car F est continue en a car dérivable en a, d'après la remarque 1. D'où $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} F(b)-F(a)$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge en a. □

On dit alors que l'intégrale est *faussement impropre* en $a\in\mathbb{R}$. De même sur un intervalle du type $[a,b[$, une intégrale peut être faussement impropre en $b\in\mathbb{R}$.

Mais une intégrale ne sera jamais faussement impropre en $+\infty$ ni en $-\infty$.

EXEMPLE 9 — $\displaystyle\int_0^8 \frac{\sin t}{t}\,dt$ *converge car elle est faussement impropre en* 0*. En effet, la fonction* $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$ *est continue sur* $]0,8]$ *et possède une limite finie en* 0^+ *:* $\dfrac{\sin t}{t}\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}1$.

III.3 Intégrer les $\sim$, o et O

On va comparer deux **fonctions positives** sur un intervalle $[a,b[$ pour obtenir une conclusion sur leurs deux **intégrales**. On ne compare pas les intégrales (Grrrrr). De même, on comparait deux suites positives pour conclure sur les séries.

> LEMME 10
> Soit f une fonction *cpm* sur $[a,b[$ et positive : $\forall t\in[a,b[,\ 0\leq f(t)$.
> L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge si, et seulement si, la fonction $F\ :\ [a,b[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est majorée.

Preuve — La fonction F est croissante car la fonction f est positive. D'où (théorème de la limite monotone) :

— la limite $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe ;

— cette limite est finie si, et seulement si, la fonction F est majorée.

□

THÉORÈME 11

Soient f et g deux fonctions *cpm* sur $[a,b[$ telles que : $\quad \forall t\in[a,b[, \quad 0\le f(t)\le g(t).$

1. Si l'intégrale $\int_{[a,b[} g$ converge, alors l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge aussi et $\int_{[a,b[} f \le \int_{[a,b[} g$.
2. Si l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ diverge, alors l'intégrale $\int_{[a,b[} g$ diverge aussi.

Preuve —

1. Soient les deux fonctions F et G définies par :
$$\forall x\in[a,b[, \quad F(x)=\int_{[a,x]} f \quad \text{et} \quad G(x)=\int_{[a,x]} g.$$
Si l'intégrale $\int_{[a,b[} g$ converge, alors (lemme 10) la fonction G est majorée. Or (croissance de l'intégrale sur un segment) $F\le G$ car $f\le g$. D'où la fonction F est aussi majorée, donc (lemme 10) l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge.
De plus, $\lim_{x\to b^-} F(x) \le \lim_{x\to b^-} G(x)$ car $F\le G$.
2. Par l'absurde.

□

PROPOSITION 12

Soient f et g deux fonctions *cpm* sur $[a,b[$. On suppose que g est positive.

1. Si $f(t)=\underset{t\to b^-}{O}(g(t))$ alors $\begin{cases} \text{l'intégrale } \int_{[a,b[} g \text{ converge } \Rightarrow \text{ l'intégrale } \int_{[a,b[} f \text{ converge} \\ \text{l'intégrale } \int_{[a,b[} f \text{ diverge } \Rightarrow \text{ l'intégrale } \int_{[a,b[} g \text{ diverge} \end{cases}.$
2. De même si $f(t)=\underset{t\to b^-}{o}(g(t))$.
3. Si $f(t)\underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$, alors les intégrales $\int_{[a,b[} f$ et $\int_{[a,b[} g$ sont de même nature.

Preuve —

1. Si $f(t)=\underset{t\to b^-}{O}(g(t))$, alors il existe $M>0$ et $c\in[a,b[$ tels que $\forall t\in[c,b[, \quad f(t)\le Mg(t)$. On conclut avec le théorème précédent que l'intégrale $\int_{[c,b[} f$ converge. Donc $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f$ converge car (remarque ??.2) les deux intégrales $\int_{[a,c]} f$ et $\int_{[c,b[} f$ convergent.
2. Une relation o est un cas particulier de relation O.
3. Si $f(t)\underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$, alors $f(t)=\underset{t\to b^-}{O}(g(t))$ et $g(t)=\underset{t\to b^-}{O}(f(t))$.

□

EXEMPLE 13 — *L'intégrale* $K=\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2+\cos t}\,dt$ *est impropre en* $+\infty$.

Elle converge car $\quad \frac{1}{t^2+\cos t}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2} \quad$ *et l'intégrale* $\quad \int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt \quad$ *converge.*

Mieux : $\forall t\in[2,+\infty[, \quad \frac{1}{t^2+\cos t}\le\frac{1}{t^2-1}$. *Or* $\int_2^x \frac{1}{t^2-1}\,dt = \left[\frac12\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\frac12\ln 3$. *Donc l'intégrale* K *converge et* $K\le\frac12\ln 3$.

Exercice 14 — *1. Quelle est la nature des intégrales*

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt \qquad et \qquad \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt\ ?$$

2. Quelle est l'erreur dans le raisonnement suivant ?

« $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ *diverge car :* $\displaystyle\frac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ *diverge.* »

La proposition suivante est aux intégrales généralisées ce qu'est le lemme I.13 aux séries : elle étudie « l'intégrale partielle » $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ et « le reste » $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,dt$.

Proposition 15

Soient f et g deux fonctions *cpm* sur $[a,b[$. On suppose que la fonction g est positive.

1. Si $f(t) = \underset{t\to b^-}{O}(g(t))$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} g(t)\,dt$ cv, alors $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,dt$ cv absolument et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt = \underset{x\to b^-}{O}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$.
2. Si $f(t) = \underset{t\to b^-}{O}(g(t))$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} g(t)\,dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \underset{x\to b^-}{O}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$.
3. De même en remplaçant O par o ou par $\sim$.

De même sur d'autres types d'intervalles.

Preuve — On procède comme pour le lemme 13 du chapitre I. □

Exercice 16 — *Montrer que* $$\int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,dt \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

III.4 La convergence absolue

Théorème 17

Soit f une fonction *cpm* sur $[a,b[$.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} |f|$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge aussi et

$$\left|\int_{[a,b[} f\right| \leq \int_{[a,b[} |f| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

De même sur d'autres types d'intervalles.

Preuve — Pour tout $t \in [a,b[$, $f(t) = \dfrac{|f(t)|+f(t)}{2} - \dfrac{|f(t)|-f(t)}{2}$.

La première fonction $g : t \mapsto \dfrac{|f(t)|+f(t)}{2}$ est positive et son intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} g$ converge car (théorème 11)

$$0 \leq g(t) \leq |f(t)| \qquad \text{et l'intégrale} \qquad \int_{[a,b[} |f| \text{ converge.}$$

La deuxième fonction $h : t \mapsto \dfrac{|f(t)|-f(t)}{2}$ est positive et son intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} h$ converge car (théorème 11)

$$0 \leq h(t) \leq |f(t)| \qquad \text{et l'intégrale} \qquad \int_{[a,b[} |f| \text{ converge.}$$

Donc l'intégrale $\int_{[a,b[} |f|$ converge car c'est la somme de deux intégrales convergentes.

Reste à prouver l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire à montrer que : $-\int_{[a,b[} |f| \leq \int_{[a,x]} f \leq +\int_{[a,b[} |f|$. On remarque que, pour tout $x \in [a,b[$,

$$\left|\int_{[a,x]} f\right| \leq \int_{[a,x]} |f| \qquad (*)$$

car : $\forall t \in [a,x],\ -|f(t)| \leq f(t) \leq +|f(t)|$ et l'intégrale sur un segment est croissante. Les inégalités larges passent à la limite $x \to b^-$. Or $\int_{[a,x]} |f| \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \int_{[a,b[} |f|$ car l'intégrale $\int_{[a,b[} |f|$ converge (par hypothèse). Et $\int_{[a,x]} f \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \int_{[a,b[} f$ car l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge (on vient de le prouver). □

On dit alors que l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ **converge absolument** (ou encore que la fonction f est **intégrable** sur $[a,b[$) et le théorème dit donc que :

$$\int_{[a,b[} f \text{ converge absolument } \Rightarrow \int_{[a,b[} f \text{ converge.}$$

La réciproque est fausse : l'exercice 20 et la remarque 21 le montreront.

EXERCICE 18 — *Quelle est la nature des intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ *?*

III.5 Intégrer par parties et changer de variable

PROPOSITION 19
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$. Si la limite $\lim_{x \to b^-} f(x)g(x)$ existe et est finie, alors :

1. les intégrales $\int_{[a,b[} fg'$ et $\int_{[a,b[} f'g$ sont de même nature ;
2. si ces intégrales convergent, alors

$$\int_{[a,b[} fg' = \lim_{x \to b^-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_{[a,b[} f'g.$$

De même sur d'autres types d'intervalles.

Preuve — Soit $x \in [a,b[$. On intègre par parties sur le segment $[a,x]$:

$$\int_a^x f(t)g'(t)\, dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)\, dt.$$

Puis on passe à la limite $x \to b^-$. □

EXERCICE 20 — *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ *converge.*

REMARQUE 21 — *L'intégrale* $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ *ne converge pas absolument car l'intégrale* $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ *diverge. En effet, soit un entier $n \geq 2$:*

$$\int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt.$$

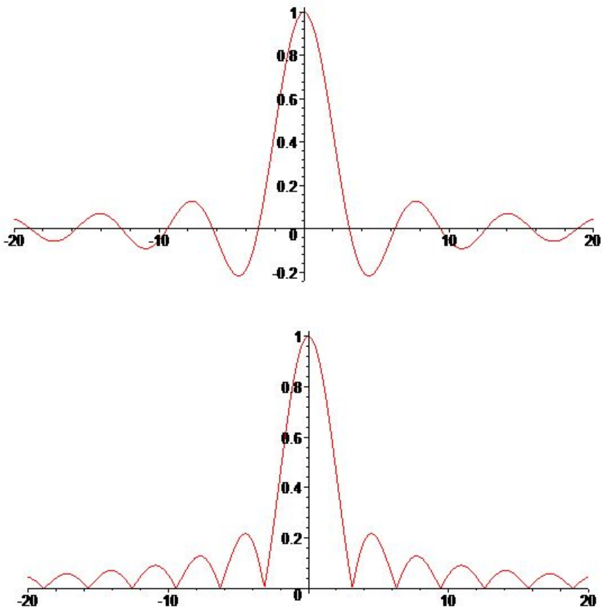

FIGURE III.4 – LES COURBES D'ÉQUATIONS $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$ ET $y = \left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right|$

Or, pour chaque $k \geq 2$*,*

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \; dt = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{2}{k\pi}.$$

Donc

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

PROPOSITION 22

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur $[\alpha, \beta[$, soient $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \lim\limits_{x\to\beta^-} \varphi(x)$. Si f est *cpm* sur $[a, b[$, alors :

1. les intégrales $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\, \varphi'(u)\, du$ sont de même nature ;
2. si ces intégrales convergent, alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f[\varphi(u)] \cdot \varphi'(u)\, du.$$

De même si φ est strictement décroissante ou sur d'autres types d'intervalles.

Preuve — Soit $x \in [\alpha, \beta[$: $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(t)\, dt = \int_\alpha^x f[\varphi(u)]\, \varphi'(u)\, du$ car la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Puis on passe à la limite $x \to \beta^-$: si l'intégrale $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f$ aussi. Et elles sont égales (par égalité des limites). Réciproquement : la fonction φ est bijective de $[\alpha, \beta[$ vers $[a, b[$ car elle strictement monotone et continue. Soit $y \in [a, b[$: $\int_a^y f(t)\, dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(y)} f[\varphi(u)]\, \varphi'(u)\, du$. Puis on passe à la limite $y \to b^-$ en utilisant que la réciproque φ^{-1} est continue : si l'intégrale $\int_a^b f$ converge, alors l'intégrale $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ aussi. Les deux intégrales sont donc de même nature. □

EXERCICE 23 — *Montrer que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t}\, dt$ *converge et que sa valeur est* $\frac{\pi}{2}$.