Colle 01 Séries numériques

MAZURS Tomass

Exercice 1.

1. (a) Comparer les suites
$$v_n = (\ln 1)^2 + \cdots + (\ln n)^2$$
et
$$I_n = \int_1^n \ln^2 t \, dt$$
   (b) Calculer un équivalent de I_n.
   (c) En déduire un équivalent de v_n.
   (d) Que dire de la convergence de la série de terme général
$$u_n = \frac{1}{(\ln 1)^2 + \cdots + \ln(n)^2}$$

2. Nature de la série de terme générale
$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Solution **1.**

1. (a) *La fonction* $f : t \mapsto (\ln)^2$ *est croissante sur* $[1, +\infty[$*, donc* $(\ln k)^2 \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq (\ln(k+1))^2$.
On somme de 1 *à* n *:*

$$u_n \leq \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq u_{n+1} = u_n + \ln(n+1)^2 \leq \int_1^{n+2} f(t)\,dt$$

(b) *Une intégration par parties où on intègre la fonction constante 1 montre que*

$$\int_1^k 1 \times (\ln t)^2\,dt = \left[t(\ln t)^2\right]_1^k - 2\int_1^k \ln t\,dt.$$

Dont on déduit que $I_k \sim (n \ln n)^2$.

(c) *Comme* $I_n \sim I_{n+1}$*, on en déduit que* $v_n \sim n(\ln n)^2$.

(d) *On reconnaît une série de Bertrand de terme général* $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ *convergente : on fait une comparaiosn série intégrale avec la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln^2(x)}$ *dont on connait une primitive.*

2. *On écrit* $u_n \sim (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$*. Le critère spécial des séries alternées nous assure la convergence de* $(-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$*, mais elle n'est pas de signe constant.*
Nous allons étudier

$$u_n - (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = (-1)^n \left[\frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n} - \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\right] = \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

qui est équivalent à $\dfrac{1}{n}$*, donc est le terme général d'une série divergente. On en déduit que* $\sum u_n$ *diverge.*

NOEL François

Exercice 2.

1. Soit a un réel strictement positif.
   Montrer que la série $\sum sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ est semi-convergente.
2. α est un nombre réel donné non entier
   (a) Soit la série de terme général $a_n = \dfrac{(\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$
   Montrer que $|a_n| \sim \dfrac{k}{n^{1+\alpha}}$, k désignant un réel.
   (b) En déduire pour quelles valeurs du réel α la série
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$$
   est absolument convergente ?
   (c) Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles cette série est semi-convergente.

Solution **2.** *1) Posons* $c_n = sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}) = sin(\pi n(1+\frac{a^2}{n^2})^{1/2})$ *et*

$$(1+\frac{a^2}{n^2})^{1/2} = 1 + \frac{a^2}{2n^2} + O(1/n^4)$$

ce qui entraine $c_n = \frac{(-1)^n \pi a^2}{2n} + O(1/n^3)$.
Cette décomposition en une série semi-convergente et une série absolument convergente induit le résultat attendu.
2)a) On remarque que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

On pose $v_n = n^{\alpha+1} a_n$ *et on obtient que*

$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = |\big(1 - \frac{\alpha+1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\big)\,\big(1 + \frac{\alpha+1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\big)| = 1 - \frac{(\alpha+1)^2}{n^2} + 0(\frac{1}{n^3})$$

ce qui montre que $|v_n|$ *est décroissante et minorée donc converge vers* k *et que*

$$|a_n| \sim \frac{k}{n^{1+\alpha}}.$$

2)b) On en déduit l'absolue convergence si seulement si $\alpha > 0$.
2)c) Comme $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - n}{n+1}$ *est négatif pour n assez grand.Donc, à partir d'un certain rang, on a affaire à une série alternée. Si* $\alpha \leq -1$, *nous avons* $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ *et alors la série est divergente puisque son terme général ne tend pas vers 0.*
Si par contre, $\alpha > -1$ *et* $\alpha \leq 0$, *on a l'inégalité* $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ *tout au moins à partir d'un certain rang.Comme, de plus ,* $|a_n|$ *tend vers 0, on a la convergence d'après le critère spécial des séries alternées. Donc la série est semi-convergente si et seulement si* $\alpha \in]-1, 0[$.

Exercice 3. Soient (u_n) et (a_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq A.$$
Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0.$$
On suppose en outre que $\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge. Prouver que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Application 1 : retrouver la règle de d'Alembert.
4. Application 2 : étudier la convergence de $\sum_n u_n$ pour
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \text{ et } u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}.$$

Solution **3.**

1. *L'idée est de se ramener à une somme télescopique. En effet, on a, pour tout $n \geq p$,*

$$Au_{n+1} \leq a_n u_n - a_{n+1}u_{n+1}.$$

Soit $N \geq p$, on somme les inégalités précédentes pour n allant de p à $N-1$. On obtient

$$A\sum_{n=p}^{N-1} u_{n+1} \leq a_p u_p - a_N u_N \leq a_p u_p.$$

Notant $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ la somme partielle de la série, on obtient

$$S_N \leq \frac{a_p u_p}{A} + S_p.$$

Autrement dit, la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ est majorée. Comme on a affaire à une série à termes positifs, ceci assure la convergence de la série.

2. *L'hypothèse s'écrit encore $a_{n+1}u_{n+1} \geq a_n u_n$ pour tout $n \geq p$. On en déduit que $a_n u_n \geq a_p u_p$, et donc que*

$$u_n \geq a_p u_p \times \frac{1}{a_n}.$$

Or la série $\sum_n \frac{1}{a_n}$ est divergente et à termes positifs. On a donc par comparaison divergence de la série $\sum_n u_n$.

3. *Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l > 1$. Posons $a_n = 1$. Alors $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \to \frac{1}{l} - 1 < 0$, et donc pour n assez grand, on a $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \leq 0$. Puisque la série $\sum_n 1$ diverge, il en est de même de $\sum_n u_n$.*
Au contraire, supposons maintenant que $l < 1$. On prend la même suite (a_n), et on observe que $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \to \frac{1}{l} - 1 > 0$, et donc pour n assez grand, on a

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \geq \frac{\frac{1}{l} - 1}{2} > 0.$$

Par le premier point, $\sum_n u_n$ converge.

4. *Pour les deux séries, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure car on est dans son cas litigieux où le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1. On va conclure par la règle de Kummer en utilisant à chaque fois $a_n = n$. Pour la première série, on a*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = -\frac{n+1}{2n+1} \leq 0.$$

Puisque la série $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente, il en est de même de $\sum_n u_n$.
Pour la deuxième série, on a cette fois

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Ainsi, par la règle de Kummer, la série est convergente.