CORRIGÉ DE LA COLLE N° 01

Séries numériques

20 septembre 2024

Exercice 1 (Les séries de Bertrand).
Soient α et β deux réels strictement positifs.

1. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
2. On suppose que $\alpha > 1$.
   (a) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
   (b) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
3. On suppose que $\alpha \leq 1$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
4. On suppose que $\alpha < 1$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
5. (a) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ est-elle convergente ?
   (b) Pour quelles valeurs de β la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge-t-elle ?

---

1. La série $\sum \frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta}$ diverge (grossièrement) car la suite $\frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta}$ ne tend pas vers zéro.
2. On suppose que $\alpha > 1$.
   (a) La série $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge car $\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha} \\ \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ cv} \end{cases}$.
   (b) $\alpha = 1 + 2h$, avec $h > 0$. D'où $\frac{(\ln n)^\beta}{n^{1+2h}} = \frac{(\ln n)^\beta}{n^h} \cdot \frac{1}{n^{1+h}} \leq \frac{1}{n^{1+h}}$ à partir d'un certain rang. Or la série $\sum \frac{1}{n^{1+h}}$ cv. Donc la série $\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ converge.
3. On suppose que $\alpha \leq 1$. La série $\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ diverge car $\begin{cases} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha} \geq 0 \\ \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ dv} \end{cases}$.
4. On suppose que $\alpha < 1$, d'où $\alpha = 1 - h$, avec $h > 0$. Alors $\frac{1}{n^{1-h}(\ln n)^\beta} = \frac{n^h}{(\ln n)^\beta} \cdot \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang. Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ diverge.

5. (a) Soit la fonction $f\ :]1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$.

La fonction f est dérivable et sa dérivée $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}$ est négative, donc f est décroissante.

$\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u = \ln(\ln x)$
par le CDV $u = \ln x$ ($du = \frac{1}{x}\,dx$).

On compare série et intégrale : $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln n} \geq \int_2^{N+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2)$. Or $\ln(\ln(N+1)) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'où $S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

(b) On suppose que $\beta < 1$. Alors $0 \leq \frac{1}{n\ln n} \leq \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$. Or la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge d'après la question précédente. Donc la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ est divergente.

On suppose que $\beta > 1$. Soit la fonction $g\ :]1,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$.

La fonction g est dérivable et sa dérivée $g'(x) = -\frac{(\beta+\ln x)(\ln x)^{\beta-1}}{\left[x(\ln x)^\beta\right]^2}$ est négative, donc g est décroissante.

$\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx = \int \frac{1}{u^\beta}\,du = \frac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \frac{-1}{(\beta-1)(\ln x)^{\beta-1}}$
par le CDV $u = \ln x$ ($du = \frac{1}{x}$). On compare série et intégrale :

$\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \int_2^N \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx = \frac{-1}{(\beta-1)}\cdot\left[\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\right] \leq M$, où $M = \frac{1}{(\beta-1)}\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}$ ne dépend pas de N. D'où la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}\right)_N$ des sommes partielles est croissante et majorée. Donc la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite strictement positive telle que la série $\sum u_n$ diverge.

Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge, où l'on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(Une indication ? Étudier $\ln \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$.)

Très inspiré, on calcule $\ln\dfrac{S_{n-1}}{S_n} = \ln\dfrac{S_n - u_n}{S_n} = \ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$. Puis on raisonne par l'absurde : si la série $\displaystyle\sum\frac{u_n}{S_n}$ converge, alors la suite $\frac{u_n}{S_n}$ tend vers 0, ce qui autorise l'équivalent $\ln\left(1-\frac{u_n}{S_n}\right) \sim -\frac{u_n}{S_n}$. D'où $\ln\dfrac{S_{n-1}}{S_n} \sim -\dfrac{u_n}{S_n}$ qui ne change pas de signe car u_n est positif par hypothèse. Les deux séries $\sum\frac{u_n}{S_n}$ et $\sum \ln\frac{S_{n-1}}{S_n}$ ont donc la même nature : elles convergent.

Or la série télescopique $\sum \ln\frac{S_{n-1}}{S_n} = \sum(\ln S_{n-1} - \ln S_n)$ a la même nature que la suite $\ln S_n$ qui converge donc aussi. C'est absurde car la suite S_n diverge par hypothèse.