Colle n° 02

Algèbre linéaire

Exercice 1 (oral Centrale PC 2013)**.** On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{i2\pi/3}$. L'application linéaire

$$\Phi\,:\,\mathbb{C}_5[X]\to\mathbb{C}^6,\ \ P\mapsto(P(1),P(j),P(j^2),P'(1),P'(j),P'(j^2)).$$

est-elle un isomorphisme ?

Exercice 2 (Projecteurs)**.** Soit E un espace vectoriel.

1. Soient p et q deux endomorphismes de E tels que $p\circ q=q\circ p$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(q)\subset\mathrm{Ker}(p\circ q)\quad\text{et}\quad\mathrm{Im}(p\circ q)\subset\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(q).$$

2. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p\circ q=q\circ p$. Montrer que :
   (a) $p\circ q$ est un projecteur ;
   (b) les inclusions précédentes sont des égalités.

Exercice 3 (Endomorphismes nilpotents)**.** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et un endomorphisme $\varphi\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^3=0$ et $\varphi^2\neq0$. (On a noté $\varphi^2=\varphi\circ\varphi$ et $\varphi^3=\varphi\circ\varphi\circ\varphi$.)

1. Montrer qu'il existe un vecteur u_0 tel que la famille $(u_0,\varphi(u_0),\varphi^2(u_0))$ est une base de E.
2. Ecrire la matrice de φ dans cette base.
3. En déduire qu'un endomorphisme commute avec φ si, et seulement si, il est de la forme $\alpha\,\mathrm{id}_E+\beta\,\varphi+\gamma\,\varphi^2$ où $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
4. Déterminer tous les endomorphismes de $\mathbb{K}_2[X]$ qui commutent avec

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}_2[X]&\to&\mathbb{K}_2[X]\\ P&\mapsto&P'.\end{array}$$