Kdo du 23/09/2024

Algèbre linéaire

Exercice 1 (*(d'après Centrale-Supélec TSI 2014, Mathématiques 1)*)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère le sous-ensemble H des polynômes P tels que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$ et le sous-ensemble C des polynômes constants.

1. Montrer que C et H sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}[X] = H \oplus C$.
3. Soient P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et Q le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x P(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)P(t)\,dt.$$

   Montrer que le polynôme Q appartient à H.
   (On pourra noter R le polynôme défini par :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)\,dt.$)
4. Soit f l'application linéaire de H vers $\mathbb{R}[X]$ qui, à tout polynôme P de H, associe le polynôme P', dérivée de P.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Montrer que f est surjective.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $f^{-1}(X^k)$.

---

1. L'ensemble C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$: on montre qu'il contient le polynôme nul et qu'il est stable par superpositions. Ou alors on remarque que C est le noyau de l'application $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P'$ et que tout noyau est un *sev*.
   Et H est un *sev* car :
   — le polynôme nul appartient à H car il a une intégrale nulle ;
   — pour tous $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ et $P,\ Q \in H$,
$$\int_0^1 (\lambda P + \mu Q)(t)dt = \lambda \int_0^1 P(t)dt + \mu \int_0^1 Q(t)dt = 0.$$
   Donc $\lambda P + \mu Q$ appartient à H.
2. Montrons que $H \cap C = \{0\}$. Si $P \in H \cap C$, alors il existe un réel c tel que $P = c$ et
$$0 = \int_0^1 P(t)dt = c.$$
   D'où le polynôme P est nul. Donc la somme $H + C$ est directe.
   Montrons que $H + C = \mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme $P - \int_0^1 P(t)dt$ appartient à H. Et $P = P - \int_0^1 P(t)dt + \int_0^1 P(t)dt$. D'où P appartient à $H + C$.
   Donc $H \oplus C = \mathbb{R}[X]$.
3. Le polynôme R est la primitive de P qui s'annule en 0. D'où, après IPP : $\int_0^1 (t-1)P(t)\,dt = [(t-1)R(t)]_0^1 - \int_0^1 R(t)\,dt = 0 - \int_0^1 R(t)\,dt$. D'où $Q(x) = R(x) - \int_0^1 R(t)\,dt$. Donc $Q \in H$.
4. (a) Si $P \in \operatorname{Ker} f$, alors $P' = 0$. D'où le polynôme P est constant. Or P appartient à H. D'où $P = 0$. Donc f est injective.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme Q défini dans la question 3 appartient à H et de plus $f(Q) = Q' = P$. Donc f est une application surjective.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes l'unique polynôme Q tel que $f(Q) = X^k$ est le polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Q(x) = \int_0^x t^k dt + \int_0^1 (t-1)t^k dt$. Donc

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_0^x t^k dt + \int_0^1 (t-1)t^k dt \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(X^k) = \frac{X^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.