Exercice 1 - Calcul de limite $(\star)$

Calculer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\cos(x)}+\frac{2}{\sin^2(x)}\right)$$

En mettant au même dénominateur on obtient :

$$\frac{1}{\ln\cos(x)}+\frac{2}{\sin^2(x)}=\frac{N(x)}{D(x)}$$

Avec $D(x)=\ln\cos(x)\sin^2(x)\underset{x\to 0}{\sim}(\cos(x)-1)\sin^2(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^4}{2}$

De plus on a $N(x)=\sin^2(x)+2\ln\cos(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^2+2\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)$

Ainsi $N(x)=x^2-\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)+2\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right)=-\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^4}{2}$

Par quotient d'équivalent on obtient alors la limite voulue à savoir :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\cos(x)}+\frac{2}{\sin^2(x)}\right)=1$$

Exercice 2 - Comparaison série-intégrale $(\star\star\star)$

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n=\left(\sum_{k=2}^{n}\ln^2(k)\right)^{-1}$$

Nous allons évaluer $\sum\limits_{k=2}^{n}\ln^2(k)$ par comparaison à une intégrale.

Comme $x\mapsto\ln^2(x)$ est continue et croissante sur $[2,+\infty[$ on a pour tout $n\geq 2$:

$$\ln^2(2)+\int_2^n\ln^2(x)\,\mathrm{d}x\leq\sum_{k=2}^{n}\ln^2(k)\leq\int_2^{n+1}\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$$

On calcule alors cette intégrale à l'aide d'un IPP, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_2^n\ln^2(x)\,\mathrm{d}x&=\left[x\ln^2(x)\right]_2^n-2\int_2^n\ln(x)\,\mathrm{d}x\\&=n\ln^2(n)-2\ln^2(2)-2\left[x\ln(x)-x\right]_2^n\\&=n\ln^2(n)-2\ln^2(2)-2n\ln(n)+2n+4\ln(2)-2\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\int_2^n\ln^2(x)\,\mathrm{d}x\underset{n\to\infty}{\sim}n\ln^2(n)$$

Et de même on a :

$$\int_2^{n+1}\ln^2(x)\,\mathrm{d}x\underset{n\to\infty}{\sim}(n+1)\ln^2(n+1)\underset{n\to\infty}{\sim}n\ln^2(n)$$

Par théorème d'encadrement on en déduit que $\sum\limits_{k=2}^{n}\ln^2(k)\underset{n\to\infty}{\sim}n\ln^2(n)$ et donc par passage à l'inverse de termes positifs on obtient :

$$u_n\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n\ln^2(n)}$$

A présent nous devons étudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n\ln^2(n)}$, pour cela on va faire une comparaison série-intégral. En posant $f:x\mapsto\frac{1}{x\ln^2(x)}$ on remarque que f est une fonction continue

positive et décroissante sur $[2,+\infty[$. Ainsi la série de terme général $\frac{1}{n\ln^2(n)}$ est convergente si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[2,+\infty[$.
Or pour tout $X \in [2,+\infty[$ par le changement de variable $y = \ln(x)$ on obitent :

$$\int_2^X \frac{1}{x\ln^2(x)}\mathrm{d}x = \int_{\ln(2)}^{\ln(X)} \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y$$

Or par critère de Riemann la fonction $y \mapsto \frac{1}{y^2}$ est intégrable sur $[\ln(2), +\infty[$, ainsi f est également intégrable sur $[2,+\infty[$ et l'on peut donc en déduire la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 3 - Série et plus encore $(\star\star\star)$

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right) = 1$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, puis que $\sum\limits_{k=1}^n a_k^2$ diverge.

Montrons ans un premier temps que (a_n) est une suite convergeante. D'après l'énoncé on sait que :

$$a_n \sim \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^n a_k^2}$$

Or $a_n \sim \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^n a_k^2}$ est une suite strictement croissante et donc sont inverse est strictement décroissante, comme elle est minorée par 0 elle converge. On en déduit que de même (a_n) converge, et l'on note alors $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Si $l \neq 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > \varepsilon$. Dès lors on en déduit que $\sum\limits_{k=1}^n a_k^2$ diverge et donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N,\ \sum\limits_{k=1}^n a_k^2 \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Dès lors pour $n \geq N$ on a :

$$a_n \times \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 2$$

Et donc ne peut converger vers 1, finalement $l = 0$.

Enfin comme $\sum\limits_{k=1}^n a_k^2 \sim \frac{1}{a_n}$ on en déduit que $\sum\limits_{k=1}^n a_k^2$ diverge.

2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k^2$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt = 1$$

Par calcul on trouve :

$$\begin{aligned}\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt &= \frac{1}{3}\left(S_n^3 - S_{n-1}^3\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(S_n - S_{n-1}\right)\left(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2\right)\\ &= \frac{1}{3}a_n^2\left(3S_n^2 - an^2 S_n - 2a_n^2 S_{n-1} - a_n^4\right)\\ &= \left(a_n S_n\right)^2 - \frac{1}{3}a_n^4\left(S_n + S_{n-1} + a_n^2\right)\\ &= \left(a_n S_n\right)^2 - \frac{2}{3}a_n^4 S_n\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite tends vers 1 par continuité de la fonction carré, et de plus le deuxième terme tends vers 0. Par somme on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt = 1$$

3. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

On pose $a_0 = 0$ dès lors on trouve :

$$\int_0^{S_n} t^2 dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt$$

Or d'après la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt = 1$ ainsi $\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt \sim 1$ et comme il s'agit de suite à terme strictement positif on en déduit que leur somme sont de même nature que que de plus :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt \sim \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Et de plus comme :

$$\int_0^{S_n} t^2 dt = \frac{1}{3} S_n^3$$

On en déduit alors que $\frac{1}{3}S_n^3 \sim n$ et donc $S_n \sim \sqrt[3]{3n}$, puis par passage au quotient on obtient $a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

Exercice 4 - Série de sommes partielles (⋆⋆⋆)

Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(k^2 + (n-k)^2\right)^\alpha}$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on a d'une part :

$$k^2 + (n-k)^2 \leq n^2 + n^2 = 2n^2$$

Et d'autre part :

$$k^2 + (n-k)^2 = 2k^2 - 2nk + n^2 = 2\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{2} \geq \frac{n^2}{2}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha-1}} \leq u_n \leq \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$$

Il ne reste plus qu'à faire une disjonction des cas en fonction de la valeur de $2\alpha - 1$:

— Si $2\alpha - 1 > 1$, par critère de Riemann la série de terme général $\frac{2^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$ est convergente, ainsi $u_n \geq 0$, on peut comparer les deux séries précédentes, on obtient alors la convergence de la série de terme général u_n.

— Si $2\alpha - 1 \leq 1$, par critère de Riemann la série de terme général $\frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha-1}}$ est divergente, par comparaison, on en déduit la divergence de la série de terme général u_n.

Exercice 5 - Série d'une intégrale (⋆)

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^2+1}}$$

En minorant grossièrement on obtient :

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^2+1} &\geq \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^2} \\ &\geq 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} u_n &\leq \int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} \\ &\leq \left[\sqrt{x}\right]_n^{n+\frac{1}{n}} \\ &\leq \sqrt{n + \frac{1}{n}} - \sqrt{n} \\ &\leq \frac{1}{n\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} + \sqrt{n}\right)} \\ &\leq \frac{1}{2n\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Or par critère de Riemann la série de terme général $\frac{1}{2n\sqrt{n}}$ converge, comme $u_n \geq 0$ on en déduit par comparaison que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 6 - Irrationalité de e (⋆⋆⋆)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.

Après calcul, on remarque que l'on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \qquad v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n\,(n+1)\,(n+1)!} < 0$$

On en déduit que (u_n) et (v_n) sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante. De plus comme $v_n - un = \frac{1}{n \times n!}$ on en déduit qu'elles sont adjacentes.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}$.

Par adjacence des suites (u_n) et (v_n) et comme elles sont strictement monotones on sait que l'on a l'encadrement :

$$u_n < e < v_n$$

En remplaçant v_n par son expression puis en multipliant par $n!$ on obtient bien :

$$n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}$$

D'où le résultat.

3. En déduire que e est irrationel.

On raisonne par l'absurde en supposant que e soit rationnel et que l'on puisse donc l'écrire $e = \frac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On applique alors l'encadrement précédent avec $n = q$ on obtient :

$$q!u_q < q!e < q!u_q + \frac{1}{q}$$

On remarque alors que $m := q!u_q$ est un entier car $k!$ divise $q!$ pour $k \in [\![0, q]\!]$ et $s := q!e = (q-1)!p$ est également un entier. Ainsi on a :

$$m < s < m + \frac{1}{q} \leq m + 1$$

Ainsi s est un entier compris entre deux entier consécutifs ce qui est absurde, d'où le résultat.
