Colle 02 Algèbre linéaire

PAGES-MARCHAIS Louis

Exercice 1. On note $U_0 = 1$ et pour $p \geq 1$

$$U_p = \frac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}, \quad p \in \mathbb{N}, \text{ et } \Delta : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
2. Calculer $\Delta^n(U_p)$.
3. En déduire que : $\forall\ P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$.
4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que :

$$\big(\forall\ n \in \mathbb{Z}, \text{ on a } P(n) \in \mathbb{Z}\big) \iff \big(\text{ les coordonnées de } P \text{ dans la base } (U_p) \text{ sont entières}\big).$$

5. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tq $\Delta^n(f) = 0$.

Solution **1.**

1. *La famille (U_p) est échelonnée en degré donc $(U_0, \cdots, U_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déuit que $U_i)$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$ et que toute sous-famille est libre donc la famille elle-même est libre.*
   Une famille échelonnée est une base dans $\mathbb{K}_n[X]$, mais il ne faut le considérer acquis sur $\mathbb{K}[X]$ qui est de dimension infinie.
2. *On calcule $\Delta(U_p) = U_{p-1}$ avec $u_{-n} = 0$, $n\mathbb{N}^*$ et on conclut par récurrence.*
3. *On écrit P decoordonnées $(a_0, \cdots, a_n)$ dans la base des (U_i) et on applique Δ^i puis on évalue en 0, ce qui donne $a_i = (\Delta^i P)(0)$.*
4. *$\Leftarrow$ Pour tout $n \geq p$, on a $U_p(n) = \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.*
   On procède par récurrence sur p : $U_0 = 1$ ne prend que des valeurs entières et soit $n_0 \leq p$ le plus grand entier tel que tel que $U_p(n_0) \notin \mathbb{Z}$, mais alors $U_p(n_0+1) - U_p(n_0) = Up - 1(n_0) \in \mathbb{Z}$, ce qui est contradictoire, n_0 n'existe pas et U_p est encore à valeurs entières.
   $\Rightarrow$: Si P ne prend que des valeurs entières, alors $(\Delta^n P)$ ne prend que des valeurs entières (par récurrence sur n) et le 3/ permet de conclure immédiatement.
5. *Il est clair que si $\deg P = n$, alors $\Delta^{n+1}(P) = 0$ d'après 3/.*
   Pour la réciproque, on procède par récurrence sur n.
   Initialisation : Si $\Delta(f) = 0$ et f à valeurs entières, alors f est la fonction constante (faire une récurrence), donc polynômiale.
   Hérédité : Supposons que $\Delta^{n-1} f = 0$ et à valeurs entières impliquent f polynômiale.
   Si $\Delta^n f = 0$, alors on pose $P = f(0) + (\Delta f)(0) U_1 + (\Delta^2 f)(0) U_2 + \cdots + (\Delta^{n-1} f)(0) U_n$ et $\Delta^{n-1}(f - P)$ vérifie appratient à $\ker \Delta$, donc constant sur $\mathbb{Z}$ (initialisation) et vaut 0 en 0, donc est nul.
   Par récurrence $f - P$ est à valeurs entières donc est polynômiale, f l'est aussi. et on a bien montré le résultat attendu.

RICORDEL Allan

<u>Exercice 2.</u> Soit l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)+P(X-1)-2P(X) \end{array} \right.$

1. Montrer que Phi est un endomorphisme.
2. Chercher $\deg(\Phi(P))$ en fonction de $\deg P$.
3. En déduire $\ker \Phi$ et $\operatorname{Im} \Phi$.
4. Montrer que : $\forall\ Q \in \mathbb{K}[X],\ \exists!\ P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\left\{ \begin{array}{l} \Phi(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0 \end{array} \right.$.

Solution **2.**

1-2 *La fonction est linéaire et $\varphi(1)=\varphi(X)=0$. On suppose $n\geq 2$, et*

$$\varphi(X^n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^kX^{n-k}-2X^n=2\sum_{k=2}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}X^{n-2k}.$$

donc $\varphi(X^n)$ est un polynôme de degré $n-2$ et de coefficient dominant (non nul!) $2\binom{n}{4}$. On en déduit que si $\deg P\leq 1$*, alors $\varphi(P)=0$ et sinon* $\deg\varphi(P)=\deg P-2$.

3 *On sait que $Im\varphi=\mathrm{Vect}(\varphi(X^n),\ n\in\mathbb{N})$ qui est donc engendrée par une famille échelonnée en degré pour $n\geq 2$, l'image est donc $\mathbb{R}[X]$. De même, $\varphi(P)=0$ ssi* $\deg P\leq 2$.

4 *L'existence d'un polynôme $P=a_0+\cdots+a_nX^n$ tel que $\varphi(P)=Q$ est assurée par la surjectivité et $a_0+a_1X\in\ker\varphi$ montre que $P-(a_0+a_1X)$ vérifie toutes les conditions.*

Exercice 3. *Endomorphismes nilpotents* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E : c'est-à-dire $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

1. Si f et g sont deux endomorphismes nilpotents, la somme est-elle nilpotente ? Quelle condition naturelle peut-on poser ?
2. Soit q le plus petit entier non nul tel que $f^q = 0$ (q est l'indice de nilpotence de f)
   (a) Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^{q-1}(x_0) \neq 0$.
   (b) Montrer que $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{q-1}(x_0))$ est libre.
   (c) En déduire que $q \leq n$ puis que $f^n = 0$.
   (d) Montrer que $f + Id_E$ est inversible.
3. On suppose $q = n$. Montrer que le commutant $C(f)$ de f

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ fg = gf\}$$

   vérifie $C(f) = \text{Vect}\,(Id, f, \cdots, f^{n-1})$:
   (a) Montrer l'inclusion : $\text{Vect}\,(Id, f, \cdots, f^{n-1}) \subset C(f)$.
   (b) Soit $g \in C(f)$ et soit un vecteur x_0 comme dans la question 2-a. Soit $(a_0, \cdots, a_{n-1})$ les coordonnées de $g(x_0)$ dans la base $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ (justifier que c'est une base). Calculer les coordonnées $g(f^k(x_0))$.
   (c) En déduire que $g = a_0 Id_E + a_1 f + \cdots a_{n-1} f^{n-1}$ et conclure.

Solution **3.**

1. *En général la somme de deux endomorphismes nilpotents n'est pas nilpotent, ainsi que le montre l'exemple suivant : soit f et g canoniquement associés aux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^T$.*
   Si f et g commutent, on peut appliquer la formule du biôme de Newton.
$$(f+g)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^i \circ g^{k-i}.$$
   Si $f^p = 0$, alors pour $i \in [\![p, n]\!]$, $f^i = 0$.
   Et si $f^q = 0$, alors $0 \leq i \leq p-1$, on voudrait $g^{k-i} = 0$. Pour cela, il suffit que $k - i \geq q$.
   Comme i vaut au plus $p-1$, on veut $k-(p-1) \geq q$, soit $k \geq p+q-1$. On a donc montrer que $(f+g)^{p+q-1} = 0$.
2. *comme $f^{q-1} \neq 0$, il existe $x_0 \in E$, tel que $f^{q-1}(x_0) \neq 0$*
3. *S'il existe une combinaison linéaire $\alpha_l f^l(x_0) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x_0) = 0$ avec $\alpha_p \neq 0$, alors en composant par f^{q-1-l}, on obtient $\alpha_l f^{q-1}(x_0) = 0$. Comme $f(x_0) \neq 0$, on a nécessairement $\alpha_l = 0$, ce qui contredit $\alpha_l \neq 0$. On en déduit que la famille $(x_0, f(x_0, \cdots, f^{q-1}(x_0))$ est libre.*
4. *Une famille libre a au plus n éléements, donc $q \leq n$. Et $f^n = f^{n-q} \circ f^q = 0$.*
5. *La forumule de Bernoulli $Id - f)(Id + f - f^2 + \cdots + (-1)^{q-1} f^{q-1}) = Id - f^q = Id$ montre que $I_n + f$ est inversible et on connaît son inverse.*
   (a) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f^k et f commutent : $f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f$. D'où le résultat.*

(b)-(c) *De plus, si g commute avec f, $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ étant une base on peut écrire*
$$g(x_0) = \alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$
et pour tout vecteur de la base $f^i(x_0)$, on a
$$g(f^i(x_0)) = f^i(g(x_0)) = \alpha_0 f^i(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1+i}(x_0)$$
donc g coïncide sur une base avec $\alpha_0 Id + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$; ces deux applications sont égales et le commutant est comme annoncé.

XXX

Exercice 4. * Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} f^4 = \operatorname{rg} f^3$.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que f non nulle et $f^3 = 0$.

1. On suppose que $f^2 = 0$. Déterminer le rang de f, les droites stables par f et les plans stables par f.
2. On suppose f^2 non nulle. Déterminer le rang de f et les sous-espaces de E stables par f.

Solution **4.** *On sait que la suite des images de f^k est décroissante et que si on a égalité à partir d'un certain rang, alors la suite se stabilise.*
Si $Im f = E$, alors la suite des images est constante, égale à E. Donc la propriété est vraie.
On suppose désormais que $f \neq 0$ et on va procéder par l'absurde : Supposons que $\operatorname{rg} f^4 < \operatorname{rg} f^3$. Alors la suite $Im f \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f^3 \subset \operatorname{Im} f^4$ est strictement décroissante. Par hypothèse, $rg f \leq 2$, puis $rg f^3 \leq 0$ et enfin f^4 serait de rang négatif, ce qui est absurde. Donc la suite des images se stabilise avant, on a nécessairement $\operatorname{rg} f^4 = \operatorname{rg} f^3$.
De même, si E est de dimension n, alors $rg f^n = \operatorname{rg} f^{n+1}$.