Corrigé de la Colle n°2

Merci à Paul M.

Ex 1 :

On pose l'application

$$\Phi : \mathbb{C}_5[X] \longrightarrow \mathbb{C}^6$$
$$P \longmapsto (P(1), P(j), P(j^2), P'(1), P'(j), P'(j^2))$$

~~Soit $P, Q \in \ker(\Phi)$~~

~~$(P-Q)(1) = P(1) - Q(1)$~~

Soit $P \in \ker(\Phi)$

les complexes $(1, j, j^2)$ sont trois racines doubles de P
↳ distinctes deux à deux

Or $\deg(P) \leq 5$

donc $P = 0$

donc $\ker(\Phi) = \{0\}$

donc le morphisme Φ est injectif

Or $\dim(\mathbb{C}_5[X]) = \dim(\mathbb{C}^6)$

donc $\boxed{\text{le morphisme } \Phi \text{ est bijectif}}$ Oui

Ex 2 : Soit E un espace vectoriel

1. Soient p et q deux endomorphismes de E tels que $p \circ q = q \circ p$

Soit $x \in \ker(p) + \ker(q)$

donc $\exists (a, b) \in \ker(p) \times \ker(q)$

$$x = a + b$$

$$p\circ q(x) = p\circ q(a) + p\circ q(b)$$
$$= q\circ p(a) + p(0) \quad \text{car } p\circ q = q\circ p$$
$$= q(0) + 0$$
$$= 0$$

d'où $x \in \ker(p\circ q)$. Alors $\boxed{\ker(p) + \ker(q) \subseteq \ker(p\circ q)}$

Soit $y \in \mathrm{Im}(p \circ q)$

donc $\exists x \in E$, $p \circ q(x) = y$

d'où $p(q(x)) = y \in \mathrm{Im}(p)$

et comme $p \circ q = q \circ p$

$q \circ p(x) = y$

$q(p(x)) = y \in \mathrm{Im}(q)$

d'où $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$

Alors $\boxed{\mathrm{Im}(p \circ q) \subseteq \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)}$ Oui

2. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$

Tu aurais donc dû faire apparaître l'hyp. là où elle est utile.

$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q$

Hyp $= p \circ (p \circ q) \circ q$ car $p \circ q = q \circ p$

$= (p \circ p) \circ (q \circ q)$

Hyp $\boxed{(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q}$ car p et q sont des projecteurs

D'où $p \circ q$ est un projecteur

~~Soit $x \in E$,~~

~~$x \in \ker(p) + \ker(q) \Leftrightarrow$~~ $\exists a, b \in \ker(p) \times \ker(q)$ ~~$x = a + b$~~

Soit $x \in \ker(p \circ q)$

d'où $p \circ q(x) = 0$

~~d'où $p \circ q \circ p \circ q(x) = 0$~~

Or $x = (x - p(x)) + p(x)$

et $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$

d'où $(x - p(x)) \in \ker(p)$

et $q(p(x)) = q \circ p(x) = 0$

d'où $p(x) \in \ker(q)$

donc $\boxed{\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)}$ car le sens inverse est déjà traité

Soit $y \in Im(p) \cap Im(q)$

D'où $\exists (a,b) \in E^2$, $\begin{cases} p(a) = y \\ q(b) = y \end{cases}$

"Comme ... alors", ça ne se dit pas.

Or ~~comme~~ p et q des projecteurs

d'alors ~~$a = y$ et $b = y$~~ $p(y) = y$, $q(y) = y$

d'où $q \circ p(y) = q(y) = y$, d'où $y \in Im(p \circ q)$

donc $\boxed{Im(p) \cap Im(q) = Im(p \circ q)}$

car le sens inverse est déjà traité

Ex 3 : Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3

et un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$

tel que $\varphi^3 = 0$, $\varphi^2 \neq 0$ — la virgule se lit "tel que" slt après le symbole $\exists$.

~~Soit $u_0 \in E$ tel que $\varphi^2(u_0) \neq 0$~~

$\exists u_0 \in E$, $\varphi^2(u_0) \neq 0$ car $\varphi^2 \neq 0$

x Hyp

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}$

Suposons $\lambda_1 u_0 + \lambda_2 \varphi(u_0) + \lambda_3 \varphi^2(u_0) = 0$

Allors $\lambda_1 \varphi^2 u_0 + \lambda_2 \varphi^3 u_0 + \lambda_3 \varphi^4 u_0 = \varphi^2 0$

d'où $\lambda_1 = 0$ car $\varphi^2(u_0) \neq 0$

Allors $\lambda_2 \varphi^2(u_0) + \lambda_3 \varphi^3(u_0) = \varphi(0)$

d'où $\lambda_2 = 0$

Allors $\lambda_3 \varphi^2(u_0) = 0$

d'où $\lambda_3 = 0$

Donc la famille $(u_0, \varphi(u_0), \varphi^2(u_0))$ de E est libre

Or $\dim E = 3$

Donc $\boxed{(u_0, \varphi(u_0), \varphi^2(u_0)) \text{ une base de } E}$

On la note $\mathcal{B}$

la matrice de φ dans β est $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Soit $C \in M_3(\mathbb{K})$

tel que $C = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

$$MC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & d & g \\ b & e & h \end{bmatrix}$$

$$CM = \begin{bmatrix} d & g & 0 \\ e & h & 0 \\ f & i & 0 \end{bmatrix}$$

d'ou les matrices C et M commutent

ssi $g = 0$ et $d = 0$ et ~~$b = 0$~~, ~~$b = f$~~, $h = 0$

et $i = e = a$

et $b = f$

~~d'où s'il commute~~

Rédac

ssi $C = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3,$

Or $M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

donc

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{les matrices } C \text{ et } M \text{ commutent} \\ \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3, \; C = \alpha I_3 + \beta M + \gamma M^2 \end{array}}$$

d'où un endomorphisme g commute avec φ ssi ~~il est de la forme~~ $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3, \; g = \alpha \, id_E + \beta \varphi + \gamma \varphi^2$

4. On pose l'endomorphisme $f : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}_2[X]$, $P \longmapsto P'$

X

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ où $P(X) = a + bX + cX^2$

alors $f^3(P(X)) = f^2(b + 2cX)$
$= f(2c)$
$= 0$

d'où $\boxed{f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$

Et $f^2(X^2) = 2 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ d'où $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

d'où d'après 3., Soit $g \in \mathcal{L}(E)$

$\boxed{g \circ f = f \circ g \iff g \in \{\alpha id_E + \beta f + \gamma f^2 \in \mathcal{L}(E) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}}$

Oui

ou $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3,\ g = \alpha id_E + \beta f + \gamma f^2$