Kdo du 27/09/2024

Intégrales & séries

Exercice 1. 1. Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$G(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t})\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t})\, dt$$

est constante.

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 u \cdot \operatorname{Arcsin}(u)\, du \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t})\, dt.$$

Conclure.

La transformation d'Abel (proposition 1) est l'analogue (dans le monde discret des séries) de l'intégration par parties (dans le monde continu des intégrales). L'intégration par parties transforme une intégrale (difficile) en une intégrale (peut-être plus facile à calculer). De même, la proposition suivante permet de transformer une série (difficile car, par exemple, elle ne converge pas absolument) en une série (dont la convergence est peut-être plus facile à montrer, par exemple en utilisant le corollaire 2).

Proposition 1 (Transformation d'Abel)

Soient deux suites a_n et b_n et les deux sommes partielles $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1}.$$

Preuve —

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) B_k \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
&= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1})
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2

Si la suite A_n est bornée et la suite B_n tend vers zéro en décroissant, alors la série $\sum a_n B_n$ converge.

Preuve — Il existe un majorant M de $|A_n|$ car la suite A_n est bornée. D'où :

1. $|A_n B_n| \leq M B_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $|A_n B_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car la suite B_n tend vers zéro ;
2. $\forall k > 0,\ |b_k| = -b_k$ car la suite B_n décroît. Et la série $\sum |b_k|$ converge car la suite B_n converge. D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} |A_k b_{k+1}| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |b_{k+1}| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |b_{k+1}| \, .$$

D'où la série $\sum A_k b_{k+1}$ converge (absolument). Donc (transformation d'Abel) la série $\sum a_k B_k$ converge.

□

Ce corollaire permet de redémontrer le théorème des séries alternées : c'est le cas particulier où $a_k = (-1)^k$. Il permet aussi de démontrer la convergence d'autres séries, comme dans l'exercice suivant. Et aussi comme dans le ▷ **DS n° 1, exercice 2, q. 4b** et le ▷ **TD n° 1, exercice 6, q. 2**.

Exercice 2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrer que la série

$$\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$$

converge absolument si $\alpha > 1$. Et qu'elle converge pour tout $\alpha > 0$.

La série converge absolument si $\alpha > 1$ car $0 \leq \left|\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ conbverge d'après la critère de Riemann.

Pour tout $\alpha > 0$, soient

$$a_n = \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

La suite B_n tend vers zéro en décroissant. Montrons que la suite A_n est bornée :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n &= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} \\ &= \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

D'où, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|A_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}.$$

Donc (corollaire 2) la série $\sum a_n B_n$ converge.