Exercice 1 - Série et plus encore (⋆⋆⋆)

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)=1$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, puis que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ diverge.

Par l'absurde on suppose que (a_n) ne converge pas vers 0. Dans ce cas la série de terme général a_k^2 diverge grossièrement, autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Or de la condition imposé sur (a_n) on en déduit :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$$

Ainsi a_n est de limite nulle, ce qui est absurde. Finalement (a_n) converge bien vers 0.

Enfin comme $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \sim \frac{1}{a_n}$ on en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ diverge.

2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt = 1$$

Par calcul on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt &= \frac{1}{3}\left(S_n^3 - S_{n-1}^3\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(S_n - S_{n-1}\right)\left(S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2\right) \\
&= \frac{1}{3}a_n^2\left(3S_n^2 - an^2S_n - 2a_n^2S_{n-1} - a_n^4\right) \\
&= \left(a_nS_n\right)^2 - \frac{1}{3}a_n^4\left(S_n + S_{n-1} + a_n^2\right) \\
&= \left(a_nS_n\right)^2 - \frac{2}{3}a_n^4S_n
\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite tends vers 1 par continuité de la fonction carré, et de plus le deuxième terme tends vers 0. Par somme on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt = 1$$

3. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

On pose $a_0 = 0$ dès lors on trouve :

$$\int_0^{S_n} t^2 dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt$$

Or d'après la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt = 1$ ainsi $\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt \sim 1$ et comme il s'agit de suite à terme strictement positif on en déduit que leur somme sont de même nature que que de plus :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt \sim \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Et de plus comme :

$$\int_0^{S_n} t^2 dt = \frac{1}{3} S_n^3$$

On en déduit alors que $\frac{1}{3} S_n^3 \sim n$ et donc $S_n \sim \sqrt[3]{3n}$, puis par passage au quotient on obtient $a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

Exercice 2 - Série d'une série (⋆⋆⋆)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ où :

$$u_n = \frac{(-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n!)}$$

Rappel : On a par comparaison série/intégrale $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

On va appliquer le critère de Leibniz :

- Il est clair que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est alternée.
- On a :

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$$

  En couplant ceci au rappel de l'énoncé on trouve que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Montrons que la suite $((|u_n|)$ est décroissante, au moins à partir d'un certain rang. Notons, pour tout $n \geq 2,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| - |u_n| &= \frac{H_{n+1}}{\ln\Big((n+1)!\Big)} - \frac{H_n}{\ln(n!)} \\ &= \frac{A_n}{\ln(n!)\ln\Big((n+1)!\Big)} \end{aligned}$$

  Où on a noté :

$$\begin{aligned} A_n &= H_{n+1}\ln(n!) - H_n \ln\Big((n+1)!\Big) \\ &= \left(H_n + \frac{1}{n+1}\right)\ln(n!) - H_n\Big(\ln(n!) + \ln(n+1)\Big) \\ &= \frac{1}{n+1}\ln(n!) - H_n\ln(n+1) \end{aligned}$$

  Comme $\frac{1}{n+1}\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\ln(n)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et que $H_n\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$ on en déduit que $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln^2(n)$. En particulier, à partir d'un certain rang, A_n est négatif. Il en résulte que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

On conclut alors en invoquant le critère de Leibniz.

Exercice 3 - Supplémentaire stable de l'image (⋆⋆)

Soient E un K-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f)$ admet un supplémentaire dans E stable par f si et seulement si :

$$\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(f) = \{0\}$$

Et que dans ces conditions, $\ker(f)$ est l'unique supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(f)$ dans E, stable par f.

> Supposons que $\mathrm{Im}\,(f)$ admette un supplémentaire S dans E stable par f. Montrons qu'alors $S = \ker(f)$, et par conséquent $\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(f)$. Soit $x \in S$, d'une part $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$, et d'autre part, puisque S est stable par f on a $f(x) \in S$. Comme $\mathrm{Im}\,(f) \cap S = \{0\}$ on en déduit que $f(x) = 0$ et donc $x \in \ker(f)$. Ainsi $S \subset \ker(f)$. De plus $E = \mathrm{Im}\,(f) \bigoplus S$ on a en utilisant le théorème du rang :
>
> $$\dim(S) = \dim(E) - \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim \ker(f)$$
>
> Or $S \subset \ker(f)$ et d'après ce qui précède leur dimensions sont égales. on en déduit que $S = \ker(f)$. Ainsi, si $\mathrm{Im}\,(f)$ admet un supplémentaire stable par f, alors $\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(f) = \{0\}$, et comme le raisonnement précédent est valable pour tout supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(f)$ dans E stable par f, on en conclut que dans ces conditions, $\ker(f)$ est l'unique supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(f)$ dans E stable par f.
> Réciproquement, si $\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(f) = \{0\}$, alors en utilisant le théorème du rang, $\ker(f)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(f)$ dans E, et $\ker(f)$ est stable par f.

Exercice 4 - Relation entre une application et un projecteur (⋆⋆)

Soient E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E.

1. Montrer que

$$\ker(f \circ p) = \ker(p) \oplus \Big(\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(p)\Big)$$

> D'abord puisque p est un projecteur on a $\ker(p) \cap \mathrm{Im}\,(p) = \{0\}$, donc a fortiori $\ker(p) \cap \Big(\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(p)\Big) = \{0\}$, ainsi la somme $\ker(p) + \Big(\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(p)\Big) = \{0\}$ est directe.
> Soit $x \in \ker(f \circ p)$ on a $x = \Big(x - p(x)\Big) + p(x)$, où $x - p(x) \in \ker(p)$ car p est un projecteur et $p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$.
> Or $f(p(x)) = 0$ donc $p(x) \in \ker(f)$ ainsi $\ker(f \circ p) \subset \ker(p) \oplus \Big(\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(p)\Big)$.
> Réciproquement, soit $x \in \ker(p) \oplus \Big(\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(p)\Big)$, il existe donc $u \in \ker(p)$ et $v \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(p)$ tel que $x = u + v$. Ainsi on a $p(x) = p(u) + p(v) = v$ car $v \in \mathrm{Im}\,(p)$ et p est une projection. De plus on a $v \in \ker(f)$ d'où $f \circ p(x) = f(p(x)) = f(v) = 0$, donc $x \in \ker(f \circ p)$ d'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

2. Montrer que

$$\mathrm{Im}\,(p \circ f) = \mathrm{Im}\,(p) \cap \Big(\mathrm{Im}\,(f) + \ker(p)\Big)$$

> Soit $y \in \mathrm{Im}\,(p \circ f)$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = p(f(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}\,(p)$, de plus $y = f(x) + \Big(p \circ f(x) - f(x)\Big)$ où $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ mais aussi $p \circ f(x) - f(x) \in \ker(p)$ car p est un projecteur, ainsi $\mathrm{Im}\,(p \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(p) \cap \Big(\mathrm{Im}\,(f) + \ker(p)\Big)$. Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}\,(p) \cap \Big(\mathrm{Im}\,(f) + \ker(p)\Big)$, d'une part $p(y) = y$ car $y \in \mathrm{Im}\,(p)$ et d'autre part il existe $u \in \ker(p)$ et $v \in \mathrm{Im}\,(f)$ tel que $y = u + v$. Il existe également $w \in E$ tel que $v = f(w)$, on a alors :
>
> $$y = p(y) = p(u+v) = p(u) + p(v) = p(f(w)) \in \mathrm{Im}\,(p \circ f)$$
>
> Ceci montre l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

Exercice 5 - Trace et déterminant (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $A^2 - \mathrm{tr}\,(A)\,A + \det(A)\,I_2 = 0$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a $\mathrm{tr}\,(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$. De plus on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(A)\,A - \det(A)\,I_2 &= (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + ad - ad + bc & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 - ad + bc \end{pmatrix} \\ &= A^2 \end{aligned}$$

2. Montrer que si $A^3 = 0$ alors $A^2 = 0$.

Tout d'abord A n'est pas inversible, car $A^3 = 0$ ainsi $\det A = 0$. En multipliant l'égalité précédente par A on obtient donc :

$$A^3 - \mathrm{tr}\,(A)\,A^2 = 0$$

Soit $\mathrm{tr}\,(A)\,A^2 = 0$ ainsi $A^2 = 0$ ou $\mathrm{tr}\,(A) = 0$. Or si $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ d'après l'équation de la question 1. on a $A^2 = 0$ d'où le résultat.

3. On suppose ici que $A \neq I_2$ et $A \neq 0$. Montrer que A est la matrice d'une projection si et seulement si $\mathrm{tr}\,A = 1$ et $\det A = 0$.

Si A est une projection, alors $A^2 = A$, d'où $A\,(A - I_2) = 0$, il s'ensuit que A n'est pas inversible car $A \neq I_2$, et donc $\det A = 0$. En reportant ceci dans l'égalité de la question 1. on en déduit $(1 - \mathrm{tr}\,A)\,A = 0$ et donc $\mathrm{tr}\,A = 1$ car $A \neq 0$. Réciproquement si $\det A = 0$ et $\mathrm{tr}\,A = 1$ d'après l'équation de la question 1. on en déduit $A^2 - A = 0$ et donc A est la matrice d'une projection.

Exercice 6 - Somme de deux projecteurs $(\star\star)$

Soit E un espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = 0 = q \circ p$.

On remarque que l'on a $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q + p \circ q + q \circ p$. Donc si $p \circ q = 0 = q \circ p$ on a bien $(p+q)^2 = p + q$ et donc $p + q$ est bien un projecteur.
Réciproquement si $p+q$ est un projecteur on a $(p+q)^2 = p+q$ et donc en simplifiant on trouve $p \circ q + q \circ p = 0$ soit $p \circ q = -q \circ p$. En composant par p à droite, d'une part, et à gauche d'autre part on trouve :

$$\begin{cases} p \circ q &= -p \circ q \circ p \\ p \circ q \circ p &= -q \circ p \end{cases}$$

On en déduit donc $p \circ q = q \circ p$ or on sais déjà que $p \circ q = -q \circ p$ d'où $p \circ q = 0 = q \circ p$.

2. On considère à présent que $p + q$ est un projecteur.

   2.a. Montrer que $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

De façon immédiate $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$, réciproquement soit $x \in \ker(p+q)$ on a donc $p(x) + q(x) = 0$. En composant par p à gauche on trouve alors $p^2(x) + p \circ q(x) = 0$ or p est un projecteur et de plus $p + q$ aussi, d'après ce qui précède on en déduit que $p \circ q = 0$ et donc $p(x) = 0$ et par le même raisonnement on trouve $q(x) = 0$. Finalement on a bien $x \in \ker p \cap \ker q$ d'où l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

2.b. Montrer que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

De façon immédiate on a $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, réciproquement soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, soit donc $y \in \operatorname{Im} p$ et $z \in \operatorname{Im} q$ tels que $x = p(y) + q(z)$. On remarque alors que l'on a :

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x) \\ &= p^2(y) + p \circ q(z) + q \circ p(y) + q^2(z) \\ &= p(y) + q(z) \\ &= x\end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité provenant du fait que p et q sont deux projecteurs et que d'après la question 1. comme $p+q$ est un projecteur $p \circ q = 0 = q \circ p$. Ainsi on a bien $x \in \operatorname{Im}(p+q)$ d'où l'inclusion et donc l'égalité.