D.M. n° 3 de mathématiques

Notations et objectifs

- *Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel* **positif**, *et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsqu'elle est convergente :*

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$$

- *On se propose de prouver dans la partie A l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f.*
- *Puis on étudie dans les parties B et C le comportement de f aux voisinages de 0 et de 2.*

Partie A — Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt \qquad \text{et} \qquad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$$

1. **Etude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$.**
   Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.
2. **Etude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$.**
   (a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente si $\alpha > 1$.
   (b) Déterminer, pour tout entier naturel k, la valeur de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\, dt$.
   (c) Démontrer l'encadrement suivant, pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $k \geqslant 1$:
   $$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\, dt \leqslant \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$
   (d) Préciser pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.
3. **Etude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$.**
   (a) L'intégrale $J(0)$ est-elle convergente ?
   (b) Prouver la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ si $\alpha > 0$.
4. **Domaine de définition de la fonction f.**
   En déduire le domaine de définition de la fonction f ainsi que le domaine de convergence absolue de l'intégrale définissant $f(\alpha)$.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

Partie B — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

On se propose, dans cette partie, d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0, et on écrit, à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$$

5. **On pose** $K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$**, pour** $\alpha \in]0,1]$.
   (a) Montrer que :
   $$K(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$
   (b) Montrer que :
   $$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt + \int_1^{\pi/2} (1-\cos(t))\,dt$$
   (c) En déduire la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
6. **Limite de l'intégrale** $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$.
   (a) Justifier l'égalité suivante :
   $$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$$
   (b) Déterminer la limite de $\alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$, puis de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ quand α tend vers 0.
   (c) En déduire la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Partie C — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7. **Une autre expression de la fonction** f.
   (a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$
   (b) Etablir que, si $0 < \alpha < 2$:
   $$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$
   (c) En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0,2[$.
8. **Limite de** $f(\alpha)$ **quand** α **tend vers** 2.
   On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$.
   (a) Montrer que φ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On notera encore φ son prolongement.
   (b) Montrer que la fonction φ admet sur $[0,\pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter).
   (c) Etablir les inégalités suivantes, pour $0 < \alpha < 2$:
   $$f(\alpha) \geqslant \alpha \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \geqslant \alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$
   (d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.