CORRIGÉ DU T.D. N° 2

Algèbre linéaire

29 septembre 2024

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$.
2. Noyau et image sont-ils supplémentaires ?
3. Déterminer une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathrm{Ker}\, f \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 0 \\ -3x & -3y & +3z & = & 0 \\ -2x & -2y & +2z & = & 0 \end{array}\right. \iff x = -y + z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u} + z\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v}.$$

   Donc $u = -e_1 + e_2$ et $v = e_1 + e_3$ forment une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

   Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Le *sev* $\mathrm{Im}\, f$ est engendré par les vecteurs $f(e_1) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$ et $f(e_3) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$. On libère cette famille pour obtenir une base de $\mathrm{Im}\, f$. Or ces trois vecteurs sont colinéaires. Donc $(e_1 - 3e_2 - 2e_3)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Le vecteur $e_1 - 3e_2 - 2e_3$ appartient au noyau et à l'image de f, d'où $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ ne sont pas en somme directe, et donc pas supplémentaires.
3. ANALYSE — Soient la matrice $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$[f]_{\mathcal{C}} = M' \iff \begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_2) = 0 \\ f(\varepsilon_3) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \varepsilon_2 \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f \\ \varepsilon_3 \in \mathrm{Ker}\, f \end{cases}.$$

   SYNTHÈSE — La question 2 nous renseigne sur $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$. On pose :
   - $\varepsilon_2 = e_1 - 3e_2 - 2e_3$ qui est bien dans $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$;
   - $\varepsilon_1 = e_1$ qui est bien un antécédent de ε_2 d'après la première colonne de la matrice M ;
   - $\varepsilon_3 = e_2 + e_3$ qui est bien dans $\mathrm{Ker}\, f$.

   Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, alors :
   - P est inversible car $\det P \neq 0$;
   - $P^{-1}MP = M'$ car $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_2) = 0$ et $f(\varepsilon_3) = 0$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'endomorphisme $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P \mapsto P' + P$ est bijectif.
2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P(X) \mapsto X \cdot [P(X) - P(X-1)]$. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par f. Écrire la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Même question pour φ.

---

1. (L'application f est un endomorphisme mais l'*ev* $\mathbb{K}[X]$ étant de dimension infinie, ne pas écrire que injective $\iff$ surjective $\iff$ bijective.)
   • <u>Première méthode</u> :
   Soit $P \in \mathbb{K}[X]$: $P \in \mathrm{Ker} f \implies f(P) = 0 \implies P' = -P \implies P = 0$ car, par l'absurde : si $P \neq 0$, alors $\deg P' < \deg P$, or $P' = -P$. C'est absurde. D'où $\mathrm{Ker} f \subset \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, donc l'endomorphisme f est injectif.
   Soient deux polynômes $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$:
   $$Q = f(P) \Longleftarrow \begin{cases} b_0 = a_0 + a_1 \\ b_1 = a_1 + 2a_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} = a_{n-1} + n a_n \\ b_n = a_n \end{cases}$$
   Et, en remontant le système, on trouve une solution $(a_0, \cdots, a_n)$. Pour tout polynôme Q, l'équation $f(P) = Q$ admet une solution P, donc la fonction f est surjective.
   • <u>Deuxième méthode</u> :
   Analyse – Soit Q est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Si $Q = f(P)$, alors $P + P' = Q$ et, en dérivant : $P' + P'' = Q'$, $P'' + P^{(3)} = Q''$, $\cdots$, $P^{(n)} + P^{(n+1)} = Q^{(n)}$ et $P^{(n+1)} + P^{(n+2)} = 0$ car $Q^{(n+1)} = 0$. D'où (télescope) : $(P + P') - (P' + P'') + (P'' + P^{(3)}) - \cdots + (-1)^n (P^{(n)} + P^{(n+1)}) - (-1)^n (P^{(n+1)} + P^{(n+2)}) = Q - Q' + Q'' + \cdots + (-1)^n Q^{(n)}$. D'où $P = Q - Q' + Q'' + \cdots + (-1)^n Q^{(n)}$. D'où l'unicité du polynôme P et, donc, l'endomorphisme f est injectif.
   Synthèse – Soit $P = Q - Q' + Q'' + \cdots + (-1)^n Q^{(n)}$. On vérifie que $Q = f(P)$. D'où l'existence du polynôme P et, donc, l'endomorphisme f est surjectif.
2. Soit $P(X)$ un polynôme : si $P(X) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $X \cdot [P(X) - P(X-1)]$ est le polynôme nul, d'où $P(X) - P(X-1)$ est le polynôme nul, d'où $P(x) = P(0)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, d'où $P(x) - P(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, d'où le polynôme $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines, d'où $P(X) - P(0)$ est le polynôme nul, donc $P(X)$ est constant.
   Réciproquement : si $P(X)$ est constant, alors $P(X) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
   Donc le noyau de φ est l'ensemble $\mathrm{Vect}(1)$ des polynômes constants.
   Le noyau de φ n'est pas $\{0\}$, donc φ n'est pas injective. D'autre part, par définition de φ, tout polynôme de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est divisible par X pour tout P, d'où le polynôme 1 n'appartient pas à l'image de φ, donc φ n'est pas surjective.
3. $f(X^0) = X^0$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(X^k) = kX^{k-1} + X^k$ appartiennent au *sev* $\mathbb{K}_n[X]$ qui est donc stable par f. Dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$, la matrice A de f :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & n \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Soit $k \in \mathbb{N}$: $\varphi(X^k) = X \cdot \left[X^k - (X-1)^k\right] = X \cdot \left[X^k - \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (-1)^{k-p} X^p\right]$, d'où $\varphi(X^0) = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\varphi(X^k) = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^{k-p+1} \binom{k}{p} X^{p+1} = \sum_{p=1}^{k} (-1)^{k-p} \binom{k}{p-1} X^p.$$
   Par suite, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(X^k) \in \mathbb{K}_n[X]$. Donc $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par φ.
   D'après le calcul de $\varphi(X^k)$, la matrice M de f dans la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & & * & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit x_0 un réel. On considère l'application linéaire :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ P & \longmapsto & \left(\int_{-1}^{+1} P(t)\,dt, P(x_0), P(-x_0)\right)\end{array}.$$

1. Ecrire la matrice, dans les bases canoniques, de l'application linéaire f.
2. Quelles sont les trois valeurs de x_0 pour lesquelles l'application f n'est pas injective ? Déterminer, pour chacune de ces valeurs, une base du noyau de f.
3. Pour quelles valeurs de x_0 l'application f est-elle bijective ? Calculer alors $f^{-1}(a,b,c)$ pour chaque $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

---

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3\\ 1 & x_0 & x_0^2\\ 1 & -x_0 & x_0^2\end{pmatrix}$.
2. $\det M = 4x_0\left(x_0^2 - \frac{1}{3}\right)$.
   $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathbb{R}^3$, d'où : f est injective *ssi* f est bijective.
   f n'est pas injective *ssi* $\det M = 0$, *ssi* $x_0 \in \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, +\frac{1}{\sqrt{3}}\}$.
   Soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$:
   – si $x_0 = 0$, alors $P \in \mathrm{Ker} f \iff M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\alpha = 0\\ \gamma = 0\end{cases} \iff P = \beta X$. D'où le polynôme X forme une base de $\mathrm{Ker} f$.
   – si $x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $P \in \mathrm{Ker} f \iff M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\beta = 0\\ \gamma = -3\alpha\end{cases} \iff P = \alpha - 3\alpha X^2$. D'où le polynôme $1 - 3X^2$ forme une base de $\mathrm{Ker} f$.
3. L'application f est bijective *ssi* $\det f \neq 0$, *ssi* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, +\frac{1}{\sqrt{3}}\}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta X + \gamma X^2) = (a,b,c) \quad &\iff \quad M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}2\alpha + \quad + \frac{2}{3}\gamma = a\\ \alpha + x_0\beta + x_0^2\gamma = b\\ \alpha - x_0\beta + x_0^2\gamma = c\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = \frac{ax_0^2 - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c}{2(\frac{1}{3} - x_0^2)}\\ \beta = \frac{b-c}{2x_0}\\ \gamma = \frac{a-b-c}{2(\frac{1}{3} - x_0^2)}\end{cases}. \end{aligned}$$

   Donc

$$f^{-1}(a,b,c) = \frac{ax_0^2 - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c}{2(\frac{1}{3} - x_0^2)} + \frac{b-c}{2x_0}X + \frac{a-b-c}{2(\frac{1}{3} - x_0^2)}X^2.$$

Exercice 4 (Matrices carrées de rang 1). Soit A une matrice carrée telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

1. En se plaçant dans une base adaptée, montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.
2. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V non nuls tels que : $A = U \cdot V^T$. Redémontrer ainsi le résultat de la question précédente. En utilisant les vecteurs colonnes U et V, déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une équation de l'hyperplan $\mathrm{Ker}(A)$.

---

1. La matrice A (de taille $n \times n$) représente, dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, un endomorphisme f. Le rang de f est égal à $\mathrm{rg}\, A = 1$. D'après le théorème du rang, la dimension du noyau $\mathrm{Ker}\, f$ est donc $n-1$. On peut construire une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ en complétant une base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1})$ de $\mathrm{Ker}\, f$ avec un vecteur ε_n. Dans cette nouvelle base, la matrice A' de f est de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & *\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & *\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

où les $*$ sont des réels et λ aussi est un réel, égal à $\mathrm{tr}(A')$. On calcule le carré de la matrice A' :

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda A'.$$

On revient dans la vieille base $\mathcal{B}$: $A^2 = \lambda A$ car $A'^2 = \lambda A'$ et $A = PA'P^{-1}$. Or $\lambda = \mathrm{tr}(A')$. Et $\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}\, A$ car les matrices A et A' sont semblables. Donc $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.

2. La matrice A est de rang 1, toutes ses colonnes sont donc colinéaires à une même colonne U :

$$A = \begin{pmatrix} v_1 U & v_2 U & \cdots & v_n U \end{pmatrix} = UV^T, \quad \text{où } V^T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs U et V ne sont pas nuls (par l'absurde : si U ou V est nul, alors la matrice A est nulle et c'est absurde car elle est de rang 1).

Redémontrons le résultat de la question 1 : $A^2 = (UV^T) \cdot (UV^T) = U(V^T U)V^T$ par associativité du produit matriciel. D'où $A^2 = (V^T U)UV^T$ car $(V^T U)$ est un scalaire et commute donc avec les matrices. On a ainsi montré que $A^2 = (V^T U)A$, or $V^T U = \mathrm{tr}(A)$ car la somme des éléments diagonaux de $A = \begin{pmatrix} v_1 U & v_2 U & \cdots & v_n U \end{pmatrix}$ est $\mathrm{tr}(A) = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_n u_n = V^T U$.

L'image de tout vecteur colonne X s'écrit $AX = UV^T X$ et est donc colinéaire à U. Ce vecteur colonne U non nul forme donc une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Soit X un vecteur colonne : $X \in \mathrm{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff UV^T X \iff (V^T X)U = 0 \iff V^T X = 0$ car le vecteur colonne U est non nul. Une équation de $\mathrm{Ker}(A)$ est donc $v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n = 0$, en notant v_i les coordonnées de V et x_i les coordonnées de X. REMARQUE : $\mathrm{Ker}(A)$ est un hyperplan car :

- (première méthode) d'après le théorème du rang, c'est un *sev* de dimension $n-1$;
- (deuxième méthode) c'est le noyau de la forme linéaire $X \mapsto V^T X$ qui est non nulle car le vecteur V est non nul.

Exercice 5. Soient x, y, z et t quatre nombres réels. Calculer, *en le factorisant au maximum*, le déterminant

$$D(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & -z & t \\ z & t & x & y \\ -z & t & -x & y \end{vmatrix}.$$

On remarque que : si $x = \pm z$ ou $y = \pm t$, alors le déterminant est nul. On cherche donc des facteurs de la forme $(x \pm z)$ et $(y \pm t)$. Pour les faire apparaître, on effectue des opérations sur les colonnes ou les lignes :

$C_1 + C_3 \to C_1$ et $C_2 + C_4 \to C_2$ ne changent pas le déterminant, d'où :

$$D(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} x+z & y+t & z & t \\ -x-z & y+t & -z & t \\ z+x & t+y & x & y \\ -z-x & t+y & -x & y \end{vmatrix} = (x+z) \cdot (y+t) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & z & t \\ -1 & 1 & -z & t \\ 1 & 1 & x & y \\ -1 & 1 & -x & y \end{vmatrix}.$$

Puis $L_1 - L_3 \to L_1$ et $L_4 - L_2 \to L_4$ ne changent pas ce déterminant, d'où :

$$D(x,y,z,t) = (x+z) \cdot (y+t) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & z-x & t-y \\ -1 & 1 & -z & t \\ 1 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & z-x & y-t \end{vmatrix}.$$

On développe suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & z-x & t-y \\ -1 & 1 & -z & t \\ 1 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & z-x & y-t \end{vmatrix} = +(z-x) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & t \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & y-t \end{vmatrix} - (t-y) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -z \\ 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & z-x \end{vmatrix} = (z-x) \cdot (y-t) \cdot (-2) - (t-y) \cdot (z-x) \cdot (-2).$$

Finalement : $D(x,y,z,t) = 4 \cdot (x+z) \cdot (y+t) \cdot (t-y) \cdot (z-x)$.

Exercice 6. Calculer, sous une forme factorisée, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

(Une indication ? Insérer une nouvelle ligne et une nouvelle colonne dans ce déterminant pour faire apparaître un déterminant de Vandermonde.)

Exercice 7 (Formes linéaires)**.** Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n+1$ formes linéaires :

$$\phi_k : P \mapsto P^{(k)}(0) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, \dots n\}.$$

Montrer que la famille $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$: si $\alpha_0\phi_0 + \cdots + \alpha_n\phi_n = 0$, alors

- $\alpha_0\phi_0(X^0) + \cdots + \alpha_n\phi_n(X^0) = \alpha_0 = 0$;
- $\alpha_0\phi_0(X^1) + \cdots + \alpha_n\phi_n(X^1) = \alpha_1 = 0$;
- $\cdots$
- $\alpha_0\phi_0(X^n) + \cdots + \alpha_n\phi_n(X^n) = n!\alpha_n = 0$.

D'où $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$. Donc la famille $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ est libre.

Exercice 8 (Familles libres & déterminant de Vandermonde)**.** Soient n réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Montrer (de deux manières) que les n fonctions définies, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, par

$$f_k \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{a_k x}$$

sont linéairement indépendantes.

Supposons que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ (ici 0 est la fonction nulle sur tout $\mathbb{R}$). On veut montrer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Par l'absurde : si les réels λ_k ne sont pas tous nuls, alors notons p le plus grand indice tel que $\lambda_p \neq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \mathrm{e}^{a_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{a_2 x} + \cdots + \lambda_p \mathrm{e}^{a_p x} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_p \neq 0.$$

Le dernier terme est le terme dominant quand x tend vers $+\infty$, divisons donc par $\mathrm{e}^{a_p x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \mathrm{e}^{(a_1 - a_p)x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(a_2 - a_p)x} + \cdots + \lambda_p = 0.$$

Passons à la limite $x \to +\infty$: $\lambda_p = 0$. C'est absurde.

D'où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc les n fonctions f_k sont linéairement indépendantes.

<u>Autre méthode</u> : on utilise un déterminant de Vandermonde.

Supposons que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots \lambda_n f_n = 0$. La fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots \lambda_n f_n$ est nulle, donc constante. Sa dérivée est donc nulle et, de même, toutes ses dérivées successives sont nulles. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lllll}
\lambda_1 \mathrm{e}^{a_1 x} & +\lambda_2 \mathrm{e}^{a_2 x} & +\cdots+ & \lambda_n \mathrm{e}^{a_n x} & = 0 \\
\lambda_1 a_1 \mathrm{e}^{a_1 x} & +\lambda_2 a_2 \mathrm{e}^{a_2 x} & +\cdots+ & \lambda_n a_n \mathrm{e}^{a_n x} & = 0 \\
\lambda_1 a_1^2 \mathrm{e}^{a_1 x} & +\lambda_2 a_2^2 \mathrm{e}^{a_2 x} & +\cdots+ & \lambda_n a_n^2 \mathrm{e}^{a_n x} & = 0 \\
 & & & & \vdots \\
\lambda_1 a_1^{n-1} \mathrm{e}^{a_1 x} & +\lambda_2 a_2^{n-1} \mathrm{e}^{a_2 x} & +\cdots+ & \lambda_n a_n^{n-1} \mathrm{e}^{a_n x} & = 0.
\end{array}\right.$$

En particulier, si $x = 0$:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\
\vdots & & & \vdots & \\
a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice carrée est inversible car son déterminant est un déterminant de Vandermonde et est non nul car les a_k sont distincts deux à deux. D'où $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc les fonctions f_k sont linéairement indépendantes.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

---

1. La matrice $A^2 + I_n$ se factorise dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $(A - iI_n)(A + iI_n)$. Comme elle n'est pas inversible, c'est que l'une au moins des deux matrices $(A - iI_n)$ et $(A + iI_n)$ n'est pas inversible.
   Premier cas : si $A - iI_n$ n'est pas inversible, alors il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = iX$.
   Second cas : si $A + iI_n$ n'est pas inversible, alors il existe de même un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AY = -iY$. D'où $A\bar{Y} = i\bar{Y}$, en notant $\bar{Y}$ le vecteur colonne dont les coordonnées sont les complexes conjugués des coordonnées de Y. Et en utilisant le fait que $\bar{i} = -i$ et que les éléments de la matrice sont réels car $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.
2. On écrit le vecteur X de la question (a) sous la forme $U + iV$ où U et V sont dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De $AX = iX$, on déduit que $A(U + iV) = i(U + iV)$ et donc
   $$AU = -V \qquad \text{et} \qquad AV = U.$$
   Reste à montrer, par l'absurde, que les vecteurs U et V ne sont pas liés. Il est impossible que U ou V soit nul, sinon U *et* V le seraient d'après les deux dernières équations, donc X serait nul, ce qui n'est pas le cas. Par suite, si (U, V) est une famille liée, on peut supposer sans perte de généralité que $\exists k \in \mathbb{R}^*,\ U = kV$. De la première équation ci-dessus, on tire $AV = -V/k$, et de la seconde, $AV = kV$, d'où l'on déduit $(1 + k^2)V = 0$, donc $V = 0$ (puisque k est réel), mais on vient de voir que cela est impossible.
   La famille (U, V) est donc libre.

Exercice 10. Soit une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le réel $\operatorname{tr}(A^T \cdot A)$ est égal à la somme des carrés de tous les éléments de la matrice A.
2. Montrer que : $A^T A = 0 \iff A = 0$.
3. Montrer que que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A^T \cdot A)$.
4. Soit la forme linéaire
   $$\tau_A \,:\, \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ M \mapsto \operatorname{tr}(A^T \cdot M).$$
   Calculer l'image $\tau_A(E_{ij})$ de chaque matrice E_{ij} de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer, de deux manières, que : la forme linéaire τ_A est nulle si, et seulement si, la matrice A est nulle.

---

1. Soient $B = A^T$ et $C = A \cdot A^T = A \cdot B$: $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$ car $b_{kj} = a_{jk}$. En particulier : $c_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$. D'où $\operatorname{tr}(C) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i,k} a_{ik}^2$.
2. Si $A = 0$, alors $A^T A = 0$. Réciproquement, si $A^T A = 0$, alors $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$, d'où la somme des carrés de tous les éléments de la matrice A est nulle, d'où chaque élément de la matrice A est nul, donc $A = 0$.
3. Supposons que $X \in \operatorname{Ker} A$. Alors $AX = 0$, d'où $A^T \cdot AX = A^T \cdot 0 = 0$, d'où $X \in \operatorname{Ker}(A^T \cdot A)$.
   Donc $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(A^T \cdot A)$.
   Réciproquement, supposons que $X \in \operatorname{Ker}(A^T \cdot A)$. Alors $A^T \cdot AX = 0$, d'où $X^T \cdot A^T \cdot AX = 0$, d'où $\|AX\|^2 = 0$, d'où $AX = 0$, d'où $X \in \operatorname{Ker} A$.
   Donc $\operatorname{Ker}(A^T \cdot A) \subset \operatorname{Ker} A$.
   Finalement, les deux noyaux sont égaux.
4. $$A \cdot E_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{1,1}} & \phantom{a_{2,1}} & & i & & \phantom{a_{p,1}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{i,1} & \dots & a_{p,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1,1} & a_{2,j} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{p,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{i,n} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,j} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ et}$$
   $\tau_A(E_{ij}) = a_{ij}$ est la trace de cette matrice.
   Si la matrice A est nulle, alors $\tau_A(M) = \operatorname{tr}(0 \cdot M) = 0$ pour tout M, donc la fonction τ_A est nulle.
   Réciproquement : si τ_A est nulle, alors $\tau_A(M) = 0$ pour tout M, en particulier $\tau_A(A^T) = 0$, d'où $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = 0$, donc $A = 0$.
   <u>Autre méthode :</u> si τ_A est nulle, alors $\tau_A(M) = 0$ pour tout M, en particulier $\tau_A(E_{ij}) = 0$ pour tout (i, j), d'où $a_{ij} = 0$ pour tout (i, j), donc $A = 0$.

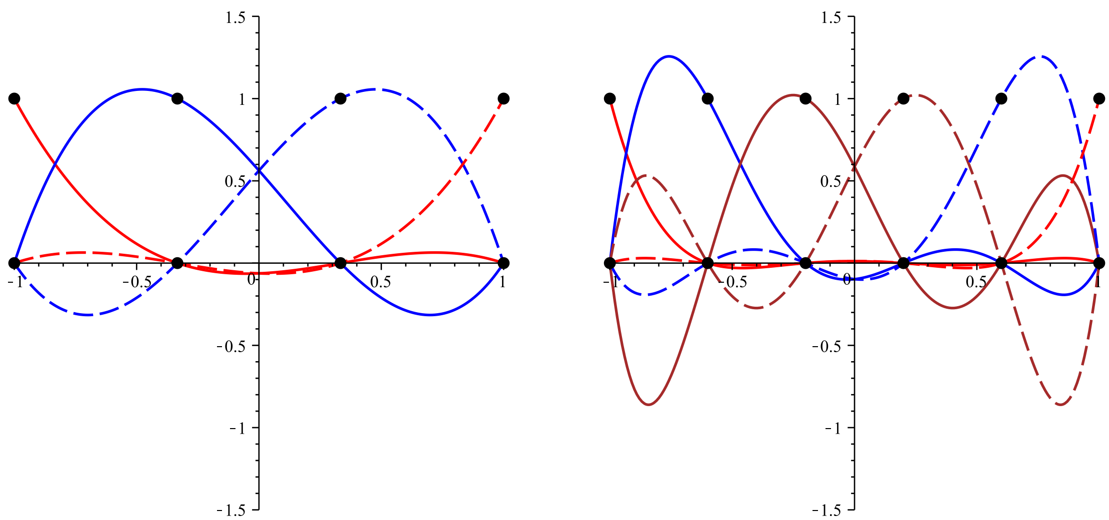
Exercice 11 (Polynômes de Lagrange & déterminant de Vandermonde)**.** Soient un entier $n \geq 2$ et n réels $a_1,\ a_2, \cdots ,\ a_n$ supposés distincts deux à deux. Soit l'application

$$\varphi\,:\,\mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n,\ P \mapsto (P(a_1), P(a_2), \cdots, P(a_n))\,.$$

1. Montrer que l'application φ est linéaire et déterminer son noyau.
2. On munit les $\mathbb{R}-$espaces vectoriels $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ de leur base canonique : $(1, X, \cdots, X^{n-1})$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ respectivement. Écrire la matrice M représentant φ dans ces bases. Quel est le déterminant de cette matrice ?
3. Les n polynômes de Lagrange $L_1,\ L_2, \cdots ,\ L_n$ sont définis par

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad L_i(X) = \prod_{j \in [\![1,n]\!]\setminus\{i\}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Calculer $\varphi(L_i)$ pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$.



Les polynômes de Lagrange pour $n = 4$ et $n = 6$ réels équidistants dans [-1,+1]

4. En utilisant à chaque fois une des trois questions précédentes, démontrer de trois manières que l'application φ est bijective.
5. Montrer que $(L_1, L_2, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. Reconnaître les polynômes

$$\sum_{i=1}^{n} P(a_i)\, L_i(X) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} L_i(X).$$

Exercice 12 (Les noyaux des itérés sont emboîtés)**.**

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k).$$

2. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1})$.
3. Montrer que, pour tout $k \geq r$: $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
4. Montrer que, pour tout $k \geq r$: $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$.

5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^r)$ et $\mathrm{Im}(f^r)$ sont supplémentaires.

---

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$:
   $f^k(x) = 0_E$, d'où $f\left[f^k(x)\right] = f(0_E)$, d'où $f^{k+1}(x) = 0_E$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
   Donc $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

   Soit $y \in \mathrm{Im} f^{k+1})$:
   il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k\left[f(x)\right]$. D'où $y \in \mathrm{Im}(f^k)$.
   Donc $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.
2. Soit, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \dim \mathrm{Ker}(f^k)$.
   Par l'absurde, supposons que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(f^k) \neq \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. La suite (u_k) est alors une suite d'entiers, strictement croissante et majorée par $n = \dim E$. C'est absurde.
   Donc : $\exists r \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1})$.
3. Par récurrence :
   - la propriété P_k « $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ » est vraie pour $k = r$.
   - supposons que P_k est vraie. On veut montrer que $\mathrm{Ker}(f^{k+2}) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+2})$: $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. D'après P_k, $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^k)$. D'où $f^k\left[f(x)\right] = f^{k+1}(x) = 0_E$. D'où $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Donc P_{k+1} est vraie.
   - On conclut que P_k est vraie pour tout $k \geq r$.
4. D'une part, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   D'autre part, $\dim \mathrm{Im}(f^{k+1}) = \dim \mathrm{Im}(f^k)$ pour tout $k \geq r$ (d'après le théorème du rang et l'égalité des noyaux).
   Donc $\mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^k)$ pour tout $k \geq r$.
5. Par le théorème du rang, on sait déjà que $\dim \mathrm{Ker}(f^r) + \dim \mathrm{Im}(f^r) = \dim E$. Il reste à montrer que $\mathrm{Ker}(f^r) \cap \mathrm{Im}(f^r) = \{0_E\}$.
   Soit $y \in \mathrm{Ker}(f^r) \cap \mathrm{Im}(f^r)$: d'une part $y \in \mathrm{Im}(f^r)$, d'où $\exists x \in E,\ y = f^r(x)$. D'autre part, $y \in \mathrm{Ker}(f^r)$, d'où $0_E = f^r(y) = f^{2r}(x)$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(f^{2r})$. Or $\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{2r})$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(f^r)$, d'où $f^r(x) = 0_E$. Donc $y = 0_E$

Exercice 13. Soient une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et l'endomorphisme

$$\varphi_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto A \cdot M.$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ_A est bijectif si, et seulement si, la matrice A est inversible.
2. Déterminer la trace $\mathrm{tr}(\varphi_A)$ de l'endomorphisme φ_A.

---

1. Si la matrice A est inversible, alors $\left(\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A\right)(M) = A^{-1} \cdot (A \cdot M) = (A^{-1} \cdot A) \cdot M = M$, d'où φ_A est bijective et sa réciproque est $\varphi_{A^{-1}}$.
   Réciproquement :
   - (première méthode) Si la matrice A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur-colonne X non nul tel que $AX = 0$ Soit M la matrice carrée dont chaque colonne est égale à X. La matrice carrée M n'est pas nulle et son image $\varphi_A(M)$ est la matrice carrée nulle. D'où l'endomorphisme φ_A n'est pas injectif. Donc φ_A n'est pas bijectif.
   - (deuxième méthode) Si φ_A est bijectif, alors φ_A est surjectif. En particulier, il existe une matrice carrée M telle que $\varphi_A(M) = I_2$. D'où $AM = I_2$. Donc la matrice A est inversible.
2. $$\varphi_A(E_{ij}) = A \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$
   d'où $\varphi_A(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj}$.
   Dans la base canonique $(E_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice de l'endomorphisme φ_A est une matrice $n^2 \times n^2$. Pour chaque couple (i,j), la coordonnée, suivant E_{ij}, de $\varphi_A(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj}$ est a_{ii}. Donc $\mathrm{tr}(\varphi_A) = \sum_{i,j} a_{ii} = n \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n \cdot \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 14 (Polynômes annulateurs)**.** 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Φ l'endomorphisme défini par

$$\Phi(M) = (\operatorname{tr} M)I_n + M$$

pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de Φ.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\Phi(M) = PM + MP.$$

Déterminer un polynôme annulateur de Φ.

---

1. On calcule $\Phi^2(M) = \operatorname{tr}(\Phi(M))I_n + \Phi(M) = (n \operatorname{tr} M + \operatorname{tr} M)I_n + (\operatorname{tr} M)I_n + M = (n+2)(\operatorname{tr} M)I_n + M$, et on constate que $\Phi^2(M) - (n+2)\Phi(M) + (n+1)M = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, le polynôme

$$P = X^2 - (n+2)X + n + 1$$

est annulateur de Φ.

2. La matrice P est celle d'un projecteur, d'où $P^2 = P$. On cherche un polynôme annulateur de Φ :

$$\Phi^2(M) = P(PM + MP) + (PM + MP)P = \Phi(M) + 2PMP, \quad \text{donc} \quad 2PMP = \Phi^2(M) - \Phi(M)$$
$$\Phi^3(M) = \Phi^2(M) + 4PMP = 3\Phi^2(M) - 2\Phi(M).$$

On en déduit que le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de l'endomorphisme Φ.

Exercice 15 (Polynômes annulateurs)**.** Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f : E \to E$ un endomorphisme. Montrer que : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont le produit est annulateur de f, alors $\operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Ker} P(f)$ et $\operatorname{Im} P(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f)$.

$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$. Si $(PQ)(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors : $\forall x \in E,\ P(f)\,[Q(f)(x)] = 0_E$. Soit un vecteur $y \in \operatorname{Im} Q(f)$: il existe un vecteur $x \in E$, tel que $y = Q(f)(x)$. D'où $P(f)(y) = 0_E$. Donc $\operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Ker} P(f)$. De même pour l'autre inclusion car $(PQ)(f) = (QP)(f)$.

Exercice 16. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$. D'où $PB = AP$. Or $P = Q + iR$, où les matrices Q et R sont à coefficients réels. Et les matrices A et B sont aussi à coefficients réels, d'où $QB = AQ$ et $RB = AR$. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (Q + tR)B = QB + tRB = AQ + tAR = A(Q + tR).$$

Il suffit, pour conclure, de montrer qu'il existe un réel t telle que la matrice $Q + tR$ est inversible. Or $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \det(Q + zR)$ est une fonction polynomiale, et non nulle car $f(i) \neq 0$ car la matrice $P = Q + iR$ est inversible. Le polynôme a donc un nombre fini de racines. En particulier, il existe une valeur réelle de z telle que $f(z) \neq 0$.

Exercice 17 (Oral Centrale PC 2007)**.** Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p le projecteur sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{id}_E - p$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

On suppose que F est stable par f. Soit $x = y + z \in E$ avec $(y, z) \in F \times G$. Alors, par définition des projecteurs p et q :

$$(q \circ f \circ p)(x) = (q \circ f)(y) = q\Big(\underbrace{f(y)}_{\in F}\Big) = 0.$$

Réciproquement, on suppose que $q \circ f \circ p = 0$. Soit $y \in F$. Alors $y = p(y)$, donc $q(f(y)) = (q \circ f \circ p)(y) = 0$, ce qui montre que $f(y)$ est dans le noyau de q, à savoir F.

Exercice 18 (Oral Centrale PSI 2014)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\dim(\mathrm{Ker} u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker} u^2) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker} u)$. (On pourra utiliser l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.)

Comme $\mathrm{Ker} u \subset \mathrm{Ker} u^2$, on a $\dim(\mathrm{Ker} u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker} u^2)$. Montrons que $\dim(\mathrm{Ker} u^2) - \dim(\mathrm{Ker} u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker} u)$.

Par théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker} u^2) - \dim(\mathrm{Ker} u) = \mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(u^2)$. L'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$ est bien défini car le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u. Or $\mathrm{Ker}\tilde{u} = \mathrm{Ker} u \cap \mathrm{Im} u$ et $\mathrm{Im}\tilde{u} = \mathrm{Im} u^2$, d'où par théorème du rang appliqué à $\tilde{u}$, $\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(u^2) = \dim(\mathrm{Ker} u \cap \mathrm{Im} u)$. On a donc $\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(u^2) \leqslant \dim(\mathrm{Ker} u)$, et le résultat.

Exercice 19 (Hyperplans)**.** Soit E un espace vectoriel. Soient H et H' deux hyperplans de E. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

Le *sev* H est un hyperplan de l'*ev* E, c'est donc le noyau d'une forme linéaire φ et cette forme linéaire est non nulle : il existe donc un vecteur $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$. De même $H' = \mathrm{Ker}\,\varphi'$ et : $\exists u' \in E,\ \varphi'(u') \neq 0$. On distingue trois cas :

- si $u' \notin H$, alors la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u')$ est un supplémentaire commun à H et H' ;
- si $u \notin H'$, alors la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$ est un supplémentaire commun à H et H' ;
- sinon $u' \in H$ et $u \in H'$, d'où $\varphi(u') = 0$ et $\varphi'(u) = 0$, d'où $\varphi(u+u') = \varphi(u) + \varphi(u') \neq 0$ et $\varphi`(u+u') = \varphi`(u) + \varphi`(u') \neq 0$, d'où $u + u'$ n'appartient ni à H ni à H', donc la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u+u')$ est un supplémentaire commun à H et H'.

Exercice 20 (matrices à diagonale strictement dominante)**.** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

La matrice A est inversible si, et seulement si, pour tout vecteur colonne X, $(AX = 0 \implies X = 0)$.

Par l'absurde. Supposons qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul tel que $AX = 0$.

Parce que $X \neq 0$, il existe un indice $I \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_I \neq 0$ et $\forall j \in [\![1, n]\!],\ |x_j| \leq |x_I| \quad (*)$.

Pour cet indice I particulier :

- d'une part $\boxed{|a_{I,I}| > \sum_{j \neq I} |a_{I,j}|}$ car la matrice est à diagonale strictement dominante ;
- d'autre part $\sum_{j=1}^{n} a_{Ij} x_j = 0$, d'où $-a_{II} x_I = \sum_{j \neq I} a_{Ij} x_j$, d'où

$$\begin{aligned}
|a_{II}|\,|x_I| &= \left|\sum_{j \neq I} a_{Ij} x_j\right| \\
&\leq \sum_{j \neq I} |a_{Ij}|\,|x_j| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{j \neq I} |a_{Ij}|\,|x_I| \quad \text{car } (*) \\
|a_{II}| &\leq \sum_{j \neq I} |a_{Ij}| \quad \text{car } x_I \neq 0.
\end{aligned}$$

C'est absurde car cette dernière ligne contredit la ligne encadrée.