Corrigé du D.M. n° 2 de mathématiques

30 septembre 2024

Ce D.M. contient un problème d'analyse et un autre d'algèbre.

Problème 1 : d'une étude des intégrales de Wallis à la question 1 et d'un développement asymptotique de $\ln n!$ à la question 2, on déduit la formule de Stirling à la question 3.

1) On pose, pour chaque entier naturel n,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n \, d\theta.$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $I_n = (n-1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2}(\cos\theta)^2 \, d\theta$.

b) En déduire la relation de récurrence $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

d) En déduire que $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Montrer que la suite (nI_nI_{n-1}) est constante et calculer cette constante.

f) En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

g) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

h) En déduire un équivalent de $\dfrac{(2k)!}{(k!)^2}$.

2) Prouver l'un après l'autre les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(a)} & \ln(n!) & = & n\ln n + o(n\ln n) \\
\text{(b)} & & = & n\ln n - n + o(n) \\
\text{(c)} & & = & n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + o(\ln n) \\
\text{(d)} & & = & n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + K + o(1) \\
\text{(e)} & & = & n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + K + \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)
\end{array}$$

où K est un réel, déterminé à la question suivante.

3) En déduire la formule de Stirling.

---

1) **a)** Soit $n \geq 2$. On intègre par parties :
$I_n = \int_0^{\pi/2} uv' = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'v$, avec $u'(\theta) = (\sin\theta)^{n-1}$ et $v(\theta) = -\cos\theta$. D'où
$I_n = \left[-(\sin\theta)^{n-1}\cos\theta\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2}(\cos\theta)^2\, d\theta$. Or le terme entre crochets est nul.

Donc $\boxed{I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2}(\cos\theta)^2\, d\theta}$

b) Soit $n \geq 2$: $I_{n-2} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2}\, d\theta - \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2}(1-\sin^2\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2}(\cos\theta)^2\, d\theta$.

D'où $I_{n-2} - I_n = \frac{1}{n-1} I_n$, donc $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$ pour tout $n \geq 2$.

c) Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin\theta \leq 1$. Doù $0 \leq \sin^n\theta \leq \sin^{n-1}\theta$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leq I_n \leq I_{n-1}$. Donc $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante}}$

d) La suite (I_n) est décroissante, d'où $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$. D'où $\boxed{\frac{n}{n+1} = \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1}$ en divisant par I_{n-1} qui est strictement positif.

e) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, d'où $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$. Donc la suite (nI_nI_{n-1}) est constante. Et cette constante est égale à I_1I_0. Or $I_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi/2$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = 1$. Donc $\boxed{\text{la suite } (nI_nI_{n-1}) \text{ est constamment égale à } \frac{\pi}{2}}$

f) De l'encadrement 1d, on tire que $\frac{I_n}{I_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ grâce au théorème des gendarmes. D'où $I_n \sim I_{n-1}$. La suite (nI_nI_{n-1}) est donc constante, égale à $\frac{\pi}{2}$ et équivalente à nI_n^2. D'où $nI_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$. Donc $\boxed{I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$ car la suite (I_n) est positive.

g) Soit $k \in \mathbb{N}$: $I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2} I_{k-2} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{(2k)(2k-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2k)!}{[(2k)(2k-2)\cdots 2]^2}\frac{\pi}{2}$.

Donc $\boxed{I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

h) D'après l'équivalent 1f, $I_{2k} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4k}}$, d'où $\boxed{\frac{(2k)!}{k!^2} \sim \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}}}$ en utilisant l'égalité 1g.

2) **a)** La première formule est une réécriture de $\sim$ avec un o :

$$\ln(n!) \sim n\ln n \iff \ln(n!) = n\ln n + o(n\ln n)\,.$$

Or $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où l'équivalent en comparant la série $\sum \ln(n)$ et l'intégrale $\int \ln(x)\,dx$.

b) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n\ln n$ en étudiant la série télescopique $\sum(u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} = \ln n - n\ln n + (n-1)\ln(n-1) = (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -1 \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Or la série $\sum(-1)$ diverge, d'où la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ diverge aussi et leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=2}^{n}(u_k - u_{k-1}) = \ln(n!) - n\ln n \sim \sum_{k=2}^{n}(-1) = -n + 1 \sim -n.$$

Donc $\boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + o(n)}$

c) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n$ en étudiant la série $\sum(u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} = (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n} \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, d'où la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ diverge aussi et leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=2}^{n}(u_k - u_{k-1}) = \ln(n!) - n\ln n + n - 1 \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2}\ln n.$$

Donc $\boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)}$

d) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n$ en étudiant la série $\sum(u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{12n^2}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge aussi, donc la suite u_n converge. Soit K sa limite.

Alors $\boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + K + o(1)}$

e) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n - K$ en étudiant la série $\sum(u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} \sim -\frac{1}{12n^2} \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où les restes sont équivalents :

$$-u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(u_k - u_{k-1}) \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{-1}{12n^2} \sim -\frac{1}{12n}$$

en comparant série et intégrale. Donc $\boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + K + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

3) On calcule l'exponentielle de la formule obtenue à la question précédente :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^K \exp\left[\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}e^K.$$

D'où l'on tire l'équivalent $\frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}e^K}{\left(n^n e^{-n}\sqrt{n}e^K\right)^2} \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}e^K}$, à comparer avec l'équivalent obtenu à la question 1h : $\frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.

Donc $e^K = \sqrt{2\pi}$ et $\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$

Problème 2 : en étudiant les formes linéaires sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,
on se propose de montrer que tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible.
Et que la trace est, à un facteur près, l'unique forme linéaire f sur E telle que $f(M \cdot N) = f(N \cdot M)$.

Notations :

- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- E désigne l'ensemble $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E est noté E^* et est appelé le dual de E.
- $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de E.
- Pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, on note J_r la matrice $\sum\limits_{i=1}^{r} E_{i,i}$.
- Pour chaque $A \in E$, on définit la forme linéaire $T_A \in E^*$ par $T_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$. Et l'ensemble H_A par $H_A = \{M \in E \mid \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.

On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant, qui est au programme de la première année :

Si $A \in E$ est de rang $r \in [\![1, n]\!]$, alors il existe deux matrices inversibles U et V de E telles que $UAV = J_r$.

1) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et on note $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in E$.

a) Montrer que H_A est un hyperplan de E. Déterminer une équation et une base de H_A.

b) Exhiber une matrice inversible M appartenant à H_A.

2) **a)** Soit $A = (a_{k,l})_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$ une matrice de E. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $T_A(E_{i,j})$.

b) En déduire que, pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe une unique matrice A de E telle que $f = T_A$.

c) En utilisant l'application $\varphi : E \to E^*,\ A \mapsto T_A$, déterminer la dimension du dual E^*.

3) On considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de E.

a) Vérifier que P est inversible et que, pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, la matrice P appartient à H_{J_r}.

b) En déduire que chaque hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

4) Soit une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f(M \cdot N) = f(N \cdot M)$ pour toutes matrices M et N de E. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $f = \lambda \operatorname{tr}$.

---

1) **a)** Le calcul donne $AM = \begin{bmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{bmatrix}$ et $\operatorname{tr}(AM) = a + b + c + d$. On en déduit que la forme linéaire T_A est non nulle car $T_A(A) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ et que

$$M \in H_A \iff a + b + c + d = 0 \iff d = -a - b - c \iff M = a(E_{1,1} - E_{2,2}) + b(E_{2,1} - E_{2,2}) + c(E_{1,2} - E_{2,2})$$

Donc $\boxed{H_A \text{ est un hyperplan de } E}$ car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle T_A. Une équation de H_A est $\boxed{a+b+c+d=0}$ et une base de H_A est $\boxed{(E_{1,1}-E_{2,2}, E_{2,1}-E_{2,2}, E_{1,2}-E_{2,2})}$

b) La matrice $\boxed{M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$ est inversible (puisque $\det(M) = -1 \neq 0$) et ses coordonnées vérifient l'équation de l'hyperplan H_A, donc $M \in GL_2(\mathbb{R}) \cap H_A$.

2) **a)** Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\boxed{T_A(E_{ij}) = a_{j,i}}$ car c'est la trace de la matrice

$$A \cdot E_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \; i \overset{j}{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}} = j \overset{j}{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{j,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Analyse — Soient $f \in E^*$ et $A = (a_{i,j}) \in E$: si $f = T_A$, alors $f(E_{i,j}) = T_A(E_{i,j}) = a_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ d'après la question précédente. Ceci prouve l'unicité de la matrice A.

Synthèse — Soit $A \in E$ la matrice définie par $f(E_{i,j}) = a_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors $f(E_{i,j}) = T_A(E_{i,j})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Or $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de E, d'où $f(M) = T_A(M)$ pour toute matrice $M \in E$. Donc $f = T_A$. Ceci prouve l'existence de la matrice A.

c) L'application φ est linéaire. Soient, en effet, A et B dans E et λ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall M \in E,\ T_{\lambda A+B}(M) = \operatorname{tr}((\lambda A+B)M) = \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(BM) = \lambda T_A(M) + T_B(M).$$

Elle est de plus bijective d'après la question 2b. C'est donc un isomorphisme de E vers E^*. Ces deux espaces vectoriels ont donc la même dimension. On conclut que $\boxed{\dim E^* = \dim E = n^2}$

3) **a)** L'ensemble des colonnes de P est une permutation des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les colonnes de P sont donc libres, par suite $\boxed{P \text{ est une matrice inversible}}$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $E_{i,i}P = \begin{cases} E_{1,n} \text{ si } i=1 \\ E_{i,i-1} \text{ si } i \geq 2 \end{cases}$ et donc $\operatorname{tr}(E_{i,i}P) = 0$

Puis, par linéarité de la trace, $T_{J_r}(P) = \sum\limits_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(E_{i,i}P) = 0$, donc $\boxed{P \text{ appartient à } H_{J_r}}$

b) Soit H un hyperplan de E : c'est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle f. D'après la question 2b, il existe une matrice $A \in E$ telle que $f = T_A$. Notons $r \in [\![0,n]\!]$ le rang de cette matrice A. Remarquons que $r \neq 0$, sans quoi la matrice A serait nulle et la forme T_A aussi. Selon le théorème rappelé dans l'énoncé, il existe alors deux matrices inversibles U et V telles que $UAV = J_r$.
Or $P \in H_{J_r}$, d'où $\operatorname{tr}(UAVP) = \operatorname{tr}(J_rP) = 0$. D'après les propriétés de la trace et l'associativité du produit matriciel, $\operatorname{tr}(U(AVP)) = \operatorname{tr}((AVP)U) = \operatorname{tr}(A(VPU)) = 0$, donc $VPU \in H_A$.
Comme les matrices V, P et U sont inversibles, la matrice $N = VPU$ l'est aussi et elle appartient à $H_A = H$. En conclusion, $\boxed{\text{tout hyperplan } H \text{ de } E \text{ contient au moins une matrice inversible}}$

4) On sait grâce à la question 2b qu'il existe $A \in E$ telle que $f = T_A$. De $f(MN) = f(NM)$, on tire que $T_A(MN) = T_A(NM)$. D'où $\operatorname{tr}(AMN) = \operatorname{tr}(ANM)$. D'où $\operatorname{tr}(AMN) = \operatorname{tr}(MAN)$. D'où $\operatorname{tr}[(AM-MA)N] = 0$.
Ceci est vrai pour toute matrice N, d'où la forme linéaire T_{AM-MA} est nulle. Donc la matrice $AM - MA$ est nulle, à nouveau d'après la question 2b.

Ceci est vrai pour toute matrice M. La matrice A commute donc avec toutes les matrices carrées. On en déduit que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ A = \lambda I_n$.

On conclut : $f = T_{\lambda I_n}$. Autrement dit : $\boxed{f = \lambda \text{ tr}}$