Colle 03 Polynômes d'endomorphismes

CHEVEREAU Edwyn

Exercice 1. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(\phi^2) \oplus \ker(\phi - 2Id)$.
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de ϕ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = \phi$. Montrer que $\ker(\phi^2)$ est stable par g. En déduire qu'un tel g n'existe pas.

Exercice 2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = 0_n$, $B \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_n + a^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
2. On pose
$$H = \{I_n + P(B) \ \ P \in \mathbb{C}[X], \ P(0) = 0\}.$$
Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

Exercice 3. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes qui sont premiers entre eux.
Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P(A) = Q(A) = 0$?

Solution **1.**

1. *On vérifie que le polynôme* $X^2 \times (X-2)$ *est un polynôme annultaeur de* φ *et on applique le théorème des noyaux.*
2. *On prend une base un vecteur* $a \in \ker \varphi^2$ *tel que* $\varphi(a) \neq 0$. *Alors* $(\varphi(a), a)$ *est une base de* $\ker \varphi^2$ *et on complète avec un vecteur tel que* $u(b) = 2b$.
3. *On a* $\varphi \circ g = g^3 = g \circ \varphi$. *Donc, si* $\varphi(x) = 0$, *alors* $g(\varphi(x)) = 0$.
   Si $g^2 = \varphi$, *alors* $\ker g \subset \ker g^2 = \ker \varphi$. *Mais* $\dim \ker \varphi = 1$, *donc* $\dim \ker g = 1$. *On en déduit que* $\ker g = \ker g^2$ *et donc est encore égal à* $\ker g^4 = E$, *ce qui est impossible. Il n'existe pas* g *tel que* $g^2 = I_n$.

Solution **2.**

1. *On calcule* $(I_n + B)(I - B + B^2 + \cdots + (-1)^{p-1}B^{p-1}) = I_n$, *d'où* $I + A^{-1}BA$ *est inversible d'inverse* $I - A^{-1}BA + A^{-1}B^2A + \cdots + (-1)^{p-1}A^{-1}B^{p-1}A$.
2. *Il est clair que* H *est non vide et stable par produit et que la multiplication est commutative. Il faut essentiellement prouver que* $I + P(B)$ *est inversible dans* H : *or* $P(0) = 0$ *montre que* $P(B) = a_1B + \cdots + a_dB^d$ *et la formule du du binôme montre que* $P(B)^p = 0$ *et on applique 1/ à* $P(B)$.

Solution **3.** *D'après le théorème de Bézout, comme* $pgcd(P, Q) = 1$, *il existe* $R, S \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $P(X).R(X) + Q(X).S(X) = 1$.
Si on avait $P(A) = Q(A) = 0$, *on aurait alors*

$$I_n = (R.P + S.Q)(A) = R(A).P(A) + S(A).Q(A) = 0 + 0 + 0,$$

ce qui est impossible.
Une telle matrice A *n'existe pas.*

DOUAUD Pia

Exercice 4.

1. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $4A^3 = 4A^2 - A + I_n$, où I_n est la matrice identité.
   (a) Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice M que l'on déterminera en fonction de A.
   (b) Montrer que M la matrice d'une projection que l'on caractérisera.
2. Soit la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) On suppose que $B^2 + B + I_n = 0$, montrer que n est pair.
   (b) On suppose que $B^3 + B^2 + B = 0$, montrer que le rang de B est pair.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} f^4 = \operatorname{rg} f^3$.

Solution **4.**

1. (a) *On pose le polynôme* $P = 4X^3 - 4X^2 + X - 1 = 4(X-1)(X-\frac{i}{2})(X+\frac{i}{2})$. P *annule* A. *On fait la division euclidienne de* X^p *par* P : $X^p = Q_p(X)P(X) + R_p(X)$ *avec*

$$R_p(X) = Q_p(X)P(X) + \alpha_p(X-\frac{i}{2})(X+\frac{i}{2}) + \beta_p(X+\frac{i}{2})(X-1) + \gamma_p(X-\frac{i}{2})(X-1)$$

qui donne le système pour $X = 1$, $i/2$ *et* $-i/2$:

$$\begin{cases} 1 = \alpha_p(1-\frac{i}{2})(1+\frac{i}{2}) \\ \left(\frac{i}{2}\right)^p = \beta_p\, i\,(\frac{i}{2}-1) \\ \left(-\frac{i}{2}\right)^p = \gamma_p\, i\,(\frac{i}{2}+1) \end{cases}$$

On en déduit $\alpha_p = \frac{4}{5}$ *et* $\lim_{p\to+\infty} \beta^p = \lim_{p\to+\infty} \gamma^p = 0$.
On obtient finalement

$$\lim_{p\to+\infty} A^p = \frac{4}{5}(A - \frac{i}{2}I_n)(A + \frac{i}{2}I_n) = \frac{1}{5}(4A^2 + I_n) = M.$$

   (b) *On a* $\lim_{p\to+\infty} A^{2p} = \lim_{p\to+\infty} A^p$, *donc* $M^2 = M$ *et* M *est un projecteur.*
On montre que l'image de M *est égale à* $\ker(A - I_n)$: *on a* $(A - I_n)M = 0$ *d'où une inclusion et dans l'autre sens si* $AV = V$, *alors* $A^pV = V$ *et donc* $LV = V$ *et* $V \in \operatorname{Im} M$.
Enfin $M(A - I_n) = 0$ *montre que* $Im\,(A - I_n) \subset \ker M$ *et avec le théorème du rang on obtient l'égalité.* M *est donc la projection sur* $\ker(A - I_n)$ *paralèllement à* $Im\,(A - I_n)$.

2. (a) $X^2 + X + 1$ *est un polynôme annulateur de* B *de racine* j *et* $j^2 = \bar{j}$. *Le théorème des noyaux nous dit que* $E = \ker(B - jI_n) \oplus \ker(B - j^2 I_n)$. *Mais* $\ker(B - jI_n) \to \ker(B - jI_n)$, $X \mapsto \bar{X}$ *est* $\mathbb{R}$-*linéaire et c'est un isomorphisme. Donc ils ont même dimension et* $\dim E$ *est paire.*
On pourra dire bientôt que X^2+X+1 *n'ayant pas de racines réelle, le polynôme caractéristique de* B *n'a pas de racines réelles non plus et donc est de degré pair, la dimension de* E.

   (b) *Avec les abus de notations usuelles,* $Im\,B$ *stable par* B *et la restriction à* $Im\,B$ *vérifie 1/, donc le rang de* B *est pair.*

Solution **5.** *On sait que la suite des images de* f^k *est décroissante et que si on a égalité à partir d'un certain rang, alors la suite se stabilise.*
Si $Im\,f = E$, *alors la suite des images est constante, égale à* E. *Donc la propriété est vraie.*
On suppose désormais que $f \neq 0$ *et on va procéder par l'absurde : Supposons que* $\operatorname{rg} f^4 < \operatorname{rg} f^3$. *Alors la suite* $Im\,f \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f^3 \subset \operatorname{Im} f^4$ *est strictement décroissante. Par hypothèse,* $rg\,f \leq 2$, *puis* $rg\,f^3 \leq 0$ *et enfin* f^4 *serait de rang négatif, ce qui est absurde. Donc la suite des images se stabilise avant, on a nécessairement* $\operatorname{rg} f^4 = \operatorname{rg} f^3$.
De même, si E *est de dimension* n, *alors* $rg\,f^n = \operatorname{rg} f^{n+1}$.

BACHELIER Lorca

<u>**Exercice 6.**</u> Soient E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E.

1. Pour $x \in E$ non nul, on définit $\mathrm{Ann}(x) = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$.
   Montrer que $\mathrm{Ann}(x)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire que $(\mathrm{Ann}(x), +)$ est un sous-groupe et pour tous $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathrm{Ann}(x)$, alors $PQ \in \mathrm{Ann}(x)$.
   En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire π_x tel que
   $$P(u)(x) = 0 \iff \pi_x \text{ divise } P$$
2. Montrer que $\deg(\pi_x) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\right\}\right)$.
3. On suppose dans cette question que le polynôme minimal de u est de la forme $\pi_u = P^\alpha$ avec P un polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer qu'il existe un vecteur e non nul tel que $\pi_u = \pi_e$.
4. S'il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ de E, stables par u tels que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$, on notera u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i et π_{u_i} son polynôme minimal.
   Montrer que dans ce cas le polynôme minimal de u et $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{u_1}, \ldots, \pi_{u_p})$.
5. L'endomorphisme u étant quelconque, montrer qu'il existe un vecteur e non nul tel que $\pi_u = \pi_e$.

Solution **6.**

1. *Même preuve que pour 'existence du polynôme minimal annulateur d'un endomorphisme.*
2. *La division euclidienne par* π_u *donne immédiatement le résultat.*
3. *on prend* e *tel que* $\deg(\pi_e)$ *soit maximal ; on a* $\pi_e | \pi_u$ *donc* $\pi_e = P^\beta$ *avec* $\beta \leq \alpha$*. Si* $x \in E$ *alors* $\pi_x = P^\gamma$ *avec* $\gamma \leq \beta$ *donc* $\pi_e(u)(x) = 0$ *puis* $\pi_e(u) = 0$ *et* $\pi_u | \pi_e$*.*
4. *facile matriciellement dans une base adaptée.*
5. $\pi_u = \prod P_i^{\alpha_i}$*, lemme des noyaux avec* $E_i = \ker(P_i^{\alpha_i})$ *puis* $e_i \in E_i$ *tel que* $\pi_{e_i} = \pi_{u_i}$ *et on prend* $e = e_1 + \cdots + e_p$*. On a* $P(u)(e) = \sum P(u)(e_i) = 0$ *ssi* $P(u)(e_i) = 0$ *car* $P(u)(e_i) \in E_i$ *et la somme est directe. On en déduit* $\pi_{e_i} | \pi_e$ *puis* $\pi_e = \mathrm{ppcm}(\pi_{e_i})$*.*