D.S. n° 2 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note f_k et g_k les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x) \quad \text{et} \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}.$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k,\ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

1. Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de V_n.
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. Justifier que l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & V_n & \to & V_n \\ & f & \mapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

   est bien défini et écrire sa matrice dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ de V_n.
3. Montrer que la famille $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k}$. Et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $g_k \in V_n$.
5. En déduire que la matrice

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.
6. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il bijectif ?

Exercice 2

1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{k!}$ converge.

On notera désormais $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ et, pour tout réel x, on notera $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.

2. Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$.
3. En déduire que $e \notin \mathbb{Q}$. (On pourra raisonner par l'absurde en encadrant $n!e$.)
4. Montrer que, si une suite d'entiers converge, alors elle est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).
5. Soit un réel a. On suppose que la suite des réels $n\{n!a\}$ converge vers un réel L. Montrer qu'il existe une suite d'entiers naturels K_n tels que $n!a = K_n + \frac{L}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. En déduire que $K_n - nK_{n-1}$ tend vers L.
7. Montrer que $L \in \mathbb{N}$ et que, à partir d'un certain rang N, $\frac{K_n}{n!} - \frac{K_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{L}{n!}$.
8. En calculant $\frac{K_n}{n!} - \frac{K_N}{N!}$ pour $n > N$, montrer que $a \in \mathbb{Q} + e\mathbb{N}$.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

- On note $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel de dimension n, formé des matrices colonnes à n lignes.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on notera $\operatorname{Ker}(A)$ le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathcal{E}_n$. La matrice A^T désignera la transposée de A et on dira que A est symétrique lorsque $A^T = A$.
- Dans $\mathcal{E}_n$, on utilisera le produit scalaire canonique défini par

$$\forall U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_n, \quad \forall V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_n, \quad (U|V) = U^T V = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Dans $\mathcal{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté det.
- $\mathcal{G}_n = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n,\ \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$.
- On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que si $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n$ on a alors dans $\mathcal{M}_{2n}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D)$$

Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

On note

$$\mathcal{S}p_{2n} = \{M \in \mathcal{M}_{2n},\ M^T J M = J\}$$

1. Calculer J^2 et J^T en fonction de I_{2n} et J. Montrer que J est inversible et identifier son inverse.
2. Vérifier que $J \in \mathcal{S}p_{2n}$ et que pour tout réel α,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}p_{2n}$$

3. Pour tout $U \in \mathcal{G}_n$, vérifier que la matrice L_U définie par $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}p_{2n}$.
4. Si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.
5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}p_{2n}$ est un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$.
6. Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{S}p_{2n}$.
7. Montrer que si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$ alors $M^T \in \mathcal{S}p_{2n}$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

8. Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{S}p_{2n}$.

Centre de $\mathcal{S}p_{2n}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{S}p_{2n}$ c'est à dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{S}p_{2n},\ \forall N \in \mathcal{S}p_{2n},\ MN = NM\}$$

9. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

   Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

10. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, montrer que $B = C = 0_n$ et $D = A$, et que A est inversible.
11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.
12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$. *Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A, où $(E_{i,j},\ 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n$.*

Déterminant d'une matrice symplectique

13. Dans cette question seulement, on suppose $n = 1$. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_2$ appartient à $\mathcal{S}p_2$ si, et seulement si, son déterminant est égal à 1.

Soit M dans $\mathcal{S}p_{2n}$ que l'on décompose sous forme de blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 14 et 15 que D est inversible.

14. Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n$ telles que

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

15. En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det(A^T D - C^T B) = 1$$

Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n$ telles que $P^T Q$ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathcal{E}_n$ tels que

$$(Q - s_1 P)V_1 = (Q - s_2 P)V_2 = 0$$

16. Montrer que le produit scalaire $(QV_1 | QV_2)$ est nul.

On suppose dorénavant D non inversible.

17. Montrer que $\mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$.

Soit m un entier, $m \leq n$. Soient $s_1, \ldots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $V_1, \ldots, V_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$(D - s_i B)V_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m$$

On rappelle qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

18. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ est libre.
19. En déduire qu'il existe un réel α tel que la matrice $D - \alpha B$ est inversible.
20. Montrer alors que toute matrice de $\mathcal{S}p_{2n}$ est de déterminant égal à 1.