Corrigé du D.S. n° 2 de mathématiques

Exercice 1 — Matrices de Kac (tiré de CCINP PSI 2020)

1. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$. Montrons que $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_k = 0$.

   Par l'absurde : supposons que les λ_k ne sont pas tous nuls. Soit alors p le plus petit indice tel que $\lambda_p \neq 0$.

   Par hypothèse, $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0$.

   D'où $\quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \lambda_k \cos^{k-p}(x) \sin^{n-k}(x) = 0$ en divisant par $\cos^p(x) \neq 0$. En prenant la limite de cette expression lorsque x tend vers $\pi/2$, on obtient $\lambda_p = 0$, ce qui est absurde.

   On a ainsi montré que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre. Par définition de V_n, c'est aussi une famille génératrice de V_n donc c'est une base de V_n.

2.
   - $f_0 = \sin^n \quad$ et $\quad f_0' = n \sin^{n-1} \cos = n f_1$.
   - $f_n = \cos^n \quad$ et $\quad f_n' = -n \cos^{n-1} \sin = -n f_{n-1}$.
   - Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!], \quad f_k = \cos^k \sin^{n-k} \quad$ et

   $$f_k' = -k \cos^{k-1} \sin^{n-k+1} + (n-k) \cos^{k+1} \sin^{n-k-1} = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1}$$

   Ces calculs prouvent que $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad f_k' \in V_n$ et que, par suite, le sous-espace vectoriel V_n est stable par la dérivation, ce qui permet de définir l'endomorphisme φ_n induit par la dérivation sur V_n. De plus, la matrice B_n de φ_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ est

   $$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$$

3. Posons $a_k = i(2k - n)$ pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}, \ g_k(x) = e^{a_k x}$.

   Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k g_k = 0$.

   D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k g_k(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et, en particulier, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k g_k(0) = 0$, d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \times 1 = 0$

De même, en dérivant : $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k = 0$. Et en dérivant successivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice carrée est inversible car son déterminant est un déterminant de Vandermonde et est non nul car les complexes a_k sont distincts deux à deux. D'où $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc les fonctions g_k sont linéairement indépendantes.

4. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k} = (e^{ix})^k\ (e^{-ix})^{n-k} = e^{ikx}\ e^{-i(n-k)x} = e^{i(2k-n)x} = g_k(x)$.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$: d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} g_k &= \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cos^j\ i^{k-j} \sin^{k-j} \right) \left(\sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} \cos^p\ (-i)^{n-k-p} \sin^{n-k-p} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{p}\ (-1)^{n-k-p}\ i^{n-j-p}\ \cos^{j+p}\ \sin^{n-j-p} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{p}\ (-1)^{n-k-p}\ i^{n-j-p}\ f_{j+p} \end{aligned}$$

   Donc $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad g_k \in V_n$ car $\quad 0 \leqslant j + p \leqslant k + n - k = n$.
5. $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \varphi_n(g_k) = g_k' = a_k g_k$ en notant $a_k = i(2k - n)$. Dans la base $(g_0, \cdots, g_n)$, la matrice B_n' de l'endomorphisme φ_n est donc la matrice $\operatorname{diag}(a_0, \cdots, a_n) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, ce qui prouve que la matrice B_n est semblable à une matrice diagonale.
6. L'endomorphisme φ_n est un automorphisme de V_n si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul. Or $\det(\varphi_n) = \det(B_n') = a_0 \times \cdots \times a_n$ est nul si, et seulement si, n est pair. Donc φ_n est une bijection si, et seulement si, n est impair.

Exercice 2

1. À partir d'un certain rang, $0 \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k^2}$. Or la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, donc la série $\sum \frac{1}{k!}$ converge aussi.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e - u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(n+1)!} > 0$. De plus, la suite (v_n) converge aussi vers e car $v_n - u_n = \frac{1}{n(n!)}$ tend vers 0. Or la suite (v_n) est strictement décroissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{(n+1)!n(n+1)} < 0$, donc $e < v_n$. Donc $\boxed{u_n < e < v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$
3. Par suite, $n!u_n < n!e < n!v_n$. D'une part $n!u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est un entier C_n car c'est une somme d'entiers. D'autre part $n!v_n = C_n + \frac{1}{n}$. Par l'absurde : supposons que e est un rationnel $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $C_n < \frac{p}{q} < C_n + \frac{1}{n}$, d'où $qC_n < p < qC_n + \frac{q}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. C'est absurde car qC_n et p sont entiers, or $\frac{q}{n} < 1$ à partir d'un certain rang. Donc $\boxed{e \notin \mathbb{Q}}$

4. Soit (w_n) une suite d'entiers convergeant vers un réel W. Alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |w_n - W| \leq \varepsilon$. En particulier, si $\varepsilon = \frac{1}{3}$, alors $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |w_{n+1} - w_n| \leq |w_{n+1} - W| + |w_n - W| \leq \frac{2}{3}$ par l'inégalité triangulaire. Donc w_n est constant à partir du rang N, ce qui prouve que $\boxed{\text{toute suite d'entiers qui converge est stationnaire}}$

5. $n!a = \lfloor n!a \rfloor + \{n!a\}$, d'où $n(n!a) = n\lfloor n!a \rfloor + n\{n!a\} = n\lfloor n!a \rfloor + L + o(1)$ car $n\{n!a\}$ tend vers L. Notons K_n l'entier $\lfloor n!a \rfloor$. Alors $\boxed{n!a = K_n + \frac{L}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

6. De $n!a = K_n + \dfrac{L}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on déduit que $(n-1)!a = K_{n-1} + \dfrac{L}{n-1} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puis que $n!a = nK_{n-1} + \dfrac{nL}{n-1} + o(1)$ en multipliant par n. D'où $K_n + \dfrac{L}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = nK_{n-1} + \dfrac{nL}{n-1} + o(1)$, donc $\boxed{K_n - nK_{n-1} = \dfrac{nL}{n-1} - \dfrac{L}{n} + o(1) \text{ tend vers } L}$

7. La suite d'entiers $K_n - nK_{n-1}$ converge vers L d'après la question précédente, elle est donc constante à partir d'un certain rang d'après la question 4. À partir de ce rang N, les entiers $K_n - nK_{n-1}$ sont égaux à L, donc $\boxed{L \in \mathbb{N}}$ et, en divisant $K_n - nK_{n-1} = L$ par $n!$, on obtient : $\boxed{\dfrac{K_n}{n!} - \dfrac{K_{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{L}{n!}}$

8. Soit $n > N$: la somme télescopique $\displaystyle\sum_{i=N+1}^{n} \left(\frac{K_i}{i!} - \frac{K_{i-1}}{(i-1)!}\right)$ vaut $\dfrac{K_n}{n!} - \dfrac{K_N}{N!} = \displaystyle\sum_{i=N+1}^{n} \frac{L}{i!}$. Par suite $\dfrac{K_n}{n!} = \dfrac{K_N}{N!} + \displaystyle\sum_{i=N+1}^{n} \frac{L}{i!}$. Or, d'après la question 5, $a = \dfrac{K_n}{n!} + \dfrac{L}{n!n} + o\left(\dfrac{1}{n!n}\right)$. D'où

$$a = \frac{K_N}{N!} + \sum_{i=N+1}^{n} \frac{L}{i!} + \frac{L}{n!n} + o\left(\frac{1}{n!n}\right) = \frac{K_N}{N!} - \sum_{i=0}^{N} \frac{L}{i!} + \sum_{i=0}^{n} \frac{L}{i!} + \frac{L}{n!n} + o\left(\frac{1}{n!n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{K_N}{N!} - \sum_{i=0}^{N} \frac{L}{i!} + eL.$$

Or $\dfrac{K_N}{N!} - \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \frac{L}{i!} \in \mathbb{Q}$ et $eL \in e\mathbb{N}$. Donc $\boxed{a \in \mathbb{Q} + e\mathbb{N}}$

Problème (Mines-Ponts PSI - 2015 - Math 2)

Le groupe symplectique

1. Un calcul par blocs donne $\boxed{J^2 = -I_{2n}}$, ce qui prouve que $\boxed{J \text{ est inversible avec } J^{-1} = -J}$.

   Par ailleurs, J est antisymétrique, c'est-à-dire $\boxed{J^T = -J}$. Finalement $J^{-1} = J^T$.

2. $J^T JJ = J^{-1}JJ = J$ montre que $\boxed{J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}}$. Un calcul par blocs donne

$$K(\alpha)^T JK(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = J$$

   ce qui justifie que $\boxed{K(\alpha) \in \mathcal{S}_{p_{2n}}}$.

3. Un calcul par blocs donne :

$$L_U^T JL_U = \begin{pmatrix} U^T & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -(U^T)^{-1} \\ U & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = J \qquad \text{car } (U^T)^{-1} = (U^{-1})^T$$

   ce qui montre que $\boxed{L_U \in \mathcal{S}_{p_{2n}}}$.

4. On suppose $M^T JM = J$. En passant au déterminant, on obtient (le déterminant est un morphisme multiplicatif invariant par transposition)

$$\det(M)^2 \det(J) = \det(J)$$

   Comme J est inversible, $\det(J)$ est non nul et donc $(\det M)^2 = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\det(M) \in \{1, -1\}}$.

5. Soient $M, N \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. On a :

$$(MN)^T J(MN) = N^T(M^T JM)J = N^T JN = J$$

   ce qui prouve que $\boxed{\mathcal{S}_{p_{2n}} \text{ est stable par produit}}$.

6. Un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ a un déterminant non nul (de valeur ± 1) et $\boxed{\text{est donc inversible}}$. Si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, on a $M^T JM = J$. Multiplions par M^{-1} à droite et par $(M^T)^{-1}$ à gauche ; on a alors :

$$J = (M^T)^{-1}JM^{-1} = (M^T)^{-1}JM^{-1} = (M^{-1})^T JM^{-1}$$

   et donc $\boxed{M^{-1} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}}$.

7. Soit $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. On a $M^{-1} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ et donc $(M^{-1})^T J M^{-1} = J$. En transposant, comme $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$ et $J^T = J^{-1}$, cela donne :

   $(M^T)^{-1} J^{-1} M^{-1} = J^{-1}$ et, en passant à l'inverse, $MJM^T = J$ c'est-à-dire $(M^T)^T J M^T = J$

   ce qui signifie que $\boxed{M^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}}$.

8. Un produit par blocs donne :

$$M^T J M = \begin{pmatrix} -A^T C + C^T A & -A^T D + C^T B \\ -B^T C + D^T A & -B^T D + D^T B \end{pmatrix}$$

   Ainsi

$$\boxed{M \in \mathcal{S}_{p_{2n}} \text{ si et seulement si } -A^T C + C^T A = -B^T D + D^T B = 0_n \text{ et } A^T D - C^T B = -B^T C + D^T A = I_n}.$$

Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

9. I_{2n} et $-I_{2n}$ sont des éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ (car $I_{2n}^T J I_{2n} = J$ et $(-I_{2n})^T J(-I_{2n}) = J$) et elles commutent avec toute matrice donc, en particulier, avec toutes celles de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$. Ainsi $\boxed{\{I_{2n}, -I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}}$.

10. Comme $M \in \mathcal{Z}$, M commute avec L car $L = K(-1)^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ (questions **2** et **7**). Un calcul par blocs donne alors :

$$\begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix}$$

   et ainsi $C = 0$ et $A = D$. Compte tenu de ces relations, $L^T M = M L^T$ (qui a lieu puisque $L^T = K(-1) \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$) donne

$$\begin{pmatrix} A+B & B \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A & A+B \end{pmatrix}$$

   et ainsi $B = 0$. Enfin, comme $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, les relations de la question **8** donnent $AA^T = I_n$, et donc $A \in \mathcal{G}_n$.

   On a montré que $\boxed{B = C = 0_n,\ D = A,\ A \in \mathcal{G}_n}$.

11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. On utilise maintenant le fait que L_U commute avec M, ce qui donne (compte tenu des relations de la question précédente) :

$$\begin{pmatrix} AU & 0_n \\ 0_n & A(U^{-1})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UA & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T A \end{pmatrix}$$

   et en particulier $\boxed{AU = UA}$.

12. Les matrices $I_n + E_{i,j}$ sont toutes inversibles (leur déterminant vaut 1 si $i \neq j$ et 2 si $i = j$) et commutent donc avec A. Ainsi $AE_{i,j} = E_{i,j}A$.
   Remarquons que :

$$(AE_{i,j})_{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{si } v \neq j \\ a_{u,i} & \text{si } v = j \end{cases} \quad \text{et} \quad (E_{i,j}A)_{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{si } u \neq i \\ a_{j,v} & \text{si } u = i \end{cases}$$

Supposons que $i \neq j$; en égalant les coefficients d'indices (i, j) de $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$, on obtient que $a_{i,i} = a_{j,j}$.
Pour tout i, en égalant les coefficients d'indices (i, j) de $AE_{i,i}$ et $E_{i,i}A$, on obtient, pour $j \neq i$, $a_{i,j} = 0$.
La matrice A est donc du type αI_n. Comme $\det(A)^2 = \det(M) = \pm 1$, on a $\alpha^{2n} = \pm 1$ et donc $\alpha = \pm 1$.

On a donc $\boxed{A = \pm I_n}$ et $M = \pm I_{2n}$. Ceci montre l'inclusion réciproque de la question **9** et donc que $\boxed{\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}}$.

Déterminant d'une matrice symplectique

13. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$. Alors $M^T J M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bc - ad \\ ad - bc & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S}_{p_2} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 0 & bc - ad \\ ad - bc & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad ad - bc = 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la matrice } M \text{ appartient à } \mathcal{S}_{p_2} \text{ si, et seulement si } \det(M) = 1}$.

14. Un calcul par blocs montre que les matrices Q, U, V, W conviennent si et seulement si :

$$U + QV = A, \ QW = B, \ V = C, \ W = D$$

Il suffit donc de poser $\boxed{V = C, \ W = D, \ Q = BD^{-1}, \ U = A - BD^{-1}C}$.

15. D'après la question **8**, $D^T B = B^T D$ et donc $BD^{-1} = (D^{-1})^T B^T = (BD^{-1})^T$, c'est à dire que $\boxed{BD^{-1} \text{ est symétrique}}$. Avec la question **14**, et comme le déterminant est un morphisme multiplicatif,

$$\det(M) = \det(UW) = \det(U)\det(W) = \det(A - BD^{-1}C)\det(D)$$

en utilisant la formule rappelée du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Le déterminant étant invariant par transposition,

$$\det(A - BD^{-1}C) = \det(A^T - C^T(BD^{-1})^T)$$

et comme BD^{-1} est symétrique,

$$\det(A - BD^{-1}C) = \det(A^T - C^T BD^{-1})$$

Il reste à multiplier par $\det(D)$ et à utiliser encore les propriétés de morphisme du déterminant pour conclure que $\boxed{\det(M) = \det(A^T D - C^T B)}$. Les formules de la question **8** donnent $A^T D - C^T B = I_n$ et ainsi $\boxed{\det(M) = 1}$.

16. De $QV_1 = s_1 PV_1$ et $QV_2 = s_2 PV_2$, on tire que :

$$(QV_1|QV_2) = (QV_1)^T QV_2 = s_1 V_1^T P^T QV_2$$

mais aussi :

$$(QV_1|QV_2) = (QV_1)^T QV_2 = s_2 V_1^T Q^T PV_2$$

Comme $P^T Q$ est symétrique, elle est égale à sa transposée $Q^T P$, donc :

$$s_2 (QV_1|QV_2) = s_1 (QV_1|QV_2)$$

L'hypothèse $s_1 \neq s_2$ permet de conclure que $\boxed{(QV_1|QV_2) = 0}$.

17. Soit $X \in \mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Ker}(D)$. Alors

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme M est inversible, on déduit de la question précédente que $X = 0$ et ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}}$.

18. Si (par l'absurde) on avait $DV_i = 0$ alors on aurait aussi $BV_i = 0$ (puisque $s_i \neq 0$) et donc $V_i = 0$ (question précédente) ce qui est exclu.
D'après la question **8**, $D^T B = B^T D$ et donc $B^T D$ est symétrique. D'après la question **16** (on peut utiliser cette questionon car on est dans le cas où l'on suppose D non inversible) : $(DV_i|DV_j) = 0$ si $i \neq j$. La famille $(DV_1, \ldots, DV_m)$ est donc orthogonale dans $\mathcal{E}_n$. Étant de plus formée de vecteurs non nuls, $\boxed{\text{elle est libre}}$.

19. Si, par l'absurde, $D - \alpha B$ n'était jamais inversible, on pourrait utiliser $n+1$ valeurs distinctes non nulles de α (par exemple $1, 2, \ldots, n+1$) pour obtenir des vecteurs $V_1, \ldots, V_{n+1}$ comme ci-dessus. On aurait alors $n+1$ vecteurs linéairement indépendants en dimension n, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Il existe donc } \alpha \text{ réel tel que } D - \alpha B \text{ soit inversible}}$$

(et on peut même le choisir dans $\{1, \ldots, n+1\}$).

20. M et $K(\alpha)$ étant dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$, la matrice

$$N = K(\alpha) M = \begin{pmatrix} A & B \\ -\alpha A + C & -\alpha B + D \end{pmatrix}$$

l'est aussi. Comme $D - \alpha B$ est inversible, on peut utiliser **15** pour conclure que $\det(N) = 1$. Toujours en utilisant le fait que det est un morphisme multiplicatif, on conclut : $\boxed{\det(M) = 1}$.