Colle n° 03

Algèbre linéaire

Exercice 1 (Résultant de deux polynômes). Soient deux polynômes $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + cX + d$ de $\mathbb{C}_2[X]$ et le déterminant

$$\Delta(P,Q) = \begin{vmatrix} b & 0 & d & 0 \\ a & b & c & d \\ 1 & a & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

non tous nuls

1. Montrer que $\Delta(P,Q) = 0$ si, et seulement si, il existe deux polynomes $U \in \mathbb{C}_1[X]$ et $V \in \mathbb{C}_1[X]$ tels que $UP = VQ$.
2. Montrer que P et Q ont au moins une racine commune si, et seulement si, $\Delta(P,Q) = 0$.

Exercice 2. Soit une matrice M triangulaire par blocs de la forme $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On suppose connus deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement. Montrer que le polynôme $P \times Q$ est annulateur de la matrice M.

Exercice 3 (Racines carrées d'une matrice). Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et f l'endomorphisme de E représenté, dans la base (e_1, e_2, e_3), par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer, si elle existe, une base (u, v, w) de E dans laquelle la matrice de l'endomorphsme f s'écrit
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. On suppose que g est un endomorphisme de E tel que $g \circ g = f$. On note N la matrice, dans la base (u, v, w), de cet endomorphisme g. Montrer que
$$\exists (s,t,x,y) \in \mathbb{R}^4, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$
3. Déterminer toutes les matrices carrées N telles que $N^2 = B$ et en déduire toutes les matrices M carrées telles que $M^2 = A$.