

## PROGRAMME DE LA COLLE N° 4

Semaine du 7/10/2024

---

**• Algèbre linéaire ▷ chapitre II et TD n°2 :**

1. familles libres ou génératrices, bases, sous-espaces vectoriels ;
2. application linéaire  $u : E \rightarrow F$  en dimension finie ou infinie, noyau et image,  $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$  si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  ;
3. représentations matricielle d'une application linéaire dans une base, formules de passage, utilisation d'une base adaptée à un problème ;
4. tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image et (si l'ev de départ est de dimension finie) théorème du rang ;
5. trace, rang et déterminant sont des invariants de similitude ;
6. produit, intersection, somme et somme directe de deux ou plusieurs sev  $F_1, \dots, F_p$  d'un ev  $E$ , propriétés de l'application  $F_1 \times \dots \times F_p \rightarrow E$ ,  $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1 + \dots + x_p$  ;
7. projecteurs et symétries ;
8. stabilité d'un sev par un endomorphisme ; si deux endomorphismes commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre ;
9. formes linéaires et hyperplans ;
10. déterminant de Vandermonde ;
11. calcul matriciel par blocs, matrices et déterminants triangulaires ou diagonaux par blocs ;
12. polynômes annulateurs d'une matrice  $A$  & application aux calcul des puissances ou de l'inverse de  $A$  ;
13. polynôme minimal  $\mu_A$  d'une matrice  $A$ ,  $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \mu_A$  ;
14. indice de nilpotence et polynôme minimal d'une matrice nilpotente ;
15. lemme des noyaux.

**• Intégrales généralisées ▷ Chapitre III & TD n° 3.** Étudier la nature de l'intégrale, voire calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, impropre à une extrémité ou aux deux extrémités :

1. primitive d'une fonction continue sur un intervalle ;
2. intégrale d'une fonction *cpm* sur un segment ;
3. fonction *cpm* sur un intervalle ;
4. intégrales faussement impropres ;
5. critères de Riemann en 0 et en  $+\infty$  ;
6. comparaison  $\leq$ , équivalence  $\sim$ ,  $o$  et  $O$  de fonctions positives ;
7. convergence absolue (qui implique la convergence) ;
8. comparaison série-intégrale ;
9. intégration par partie :
  - en se ramenant au cas d'une intégrale sur un segment avant d'étudier la limite ;
  - ou directement avec l'intégrale généralisée (en prenant soin d'étudier la nature du terme entre crochets) ;
10. changement de variable (*CDV*) :
  - en se ramenant au cas d'une intégrale sur un segment (sous l'hypothèse *CDV*  $\mathcal{C}^1$ ) ;
  - ou directement avec l'intégrale généralisée (sous l'hypothèse *CDV*  $\mathcal{C}^1$  et strictement monotone) ;
11. ~~intégration des relations de comparaison (par analogie avec les somme partielle et reste d'une série) ;~~
12. ~~formule de Taylor avec reste intégral.~~