Corrigé de la colle n° 03

Algèbre linéaire

4 octobre 2024

Exercice 1 (Résultant de deux polynômes). Soient deux polynômes $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + cX + d$ de $\mathbb{C}_2[X]$ et le déterminant

$$\Delta(P, Q) = \begin{vmatrix} b & 0 & d & 0 \\ a & b & c & d \\ 1 & a & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $\Delta(P, Q) = 0$ si, et seulement si, il existe deux polynômes $U \in \mathbb{C}_1[X]$ et $V \in \mathbb{C}_1[X]$ non tous nuls tels que $UP = VQ$.
2. Montrer que P et Q ont au moins une racine commune si, et seulement si, $\Delta(P, Q) = 0$.

1.
$$\Delta(P, Q) = \begin{vmatrix} b & 0 & d & 0 \\ a & b & c & d \\ 1 & a & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
est égal au déterminant, dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{C}_3[X]$, de la famille de vecteurs
$$(P, XP, Q, XQ), \quad \text{où} \quad P = X^2 + aX + b \text{ et } Q = X^2 + cX + d.$$
lI est nul *ssi* cette famille est liée, *ssi* il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ tel que $\alpha P + \beta XP + \gamma Q + \delta XQ = 0$, *ssi* il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ tel que $(\alpha + \beta X)P = (-\gamma - \delta X)Q$, *ssi* il existe deux polynômes $U \in \mathbb{C}_1[X]$ et $V \in \mathbb{C}_1[X]$ non tous nuls tels que $UP = VQ$.
2. Il existe $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{C}^4$ tel que $P = (X - p_1)(X - p_2)$ et $Q = (X - q_1)(X - q_2)$.
Si P et Q ont une racine commune, alors (par exemple) $p_1 = q_1$, d'où $(X - q_2)P = (X - p_2)Q$.
Réciproquement : si $UP = VQ$, alors $(\alpha + \beta X)(X - p_1)(X - p_2) = (-\gamma - \delta X)(X - q_1)(X - q_2)$, d'où : $q_1 = p_1$ ou $q_1 = p_2$ ou $q_1 = -\frac{\alpha}{\beta}$ (et alors $q_2 = p_1$ ou $q_2 = p_2$). Dans les trois cas, P et Q ont au moins une racine commune.

Exercice 2. Soit une matrice M triangulaire par blocs de la forme $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On suppose connus deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement. Montrer que le polynôme $P \times Q$ est annulateur de la matrice M.

On commence par remarquer que (par récurrence) : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & \star \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ en effectuant des produits par blocs.
D'où, les polynômes P et Q étant des combinaisons linéaires des monômes X^k :
$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & \star \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & \star \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A) & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Puis on calcule $(PQ)(M)$:
$$(PQ)(M) = P(M)Q(M) = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(A) & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (**Racines carrées d'une matrice**)**.** Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et f l'endomorphisme de E représenté, dans la base (e_1, e_2, e_3), par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer, si elle existe, une base (u, v, w) de E dans laquelle la matrice de l'endomorphsme f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que g est un endomorphisme de E tel que $g \circ g = f$. On note N la matrice, dans la base (u, v, w), de cet endomorphisme g. Montrer que

$$\exists (s, t, x, y) \in \mathbb{R}^4, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer toutes les matrices carrées N telles que $N^2 = B$ et en déduire toutes les matrices carrées M telles que $M^2 = A$.

---

1. Soit (u, v, w) une base de E : $[f]_{(u,v,w)} = B \iff \begin{cases} f(u) = 0_E & L_1 \\ f(v) = v & L_2 \\ f(w) = -3u + 4v + w & L_3 \end{cases}$.

   $(*)$ Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$:

$$L_1 \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff / \cdots / \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff u = y(e_2 - 2e_3)$$

   $(**)$ De même, $L_2 \iff \exists y \in \mathbb{R},\ v = y(e_2 - e_3)$.

   $(***)$ On choisit $u = e_2 - 2e_3$ et $v = e_2 - e_3$. Soit $w = xe_2 + ye_2 + ze_3$:

$$L_3 \iff \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y - 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ z = -y \end{cases}.$$

   On choisit $w = e_1$.

   On vérifie que la famille $(u, v, w) = (e_2 - 2e_3, e_2 - e_3, e_1)$ est libre. On a ainsi obtenu une base dans laquelle la matrice de f est B.

2. De $f(u) = 0$, on déduit que $f[g(u)] = (g \circ g) \circ g(u) g \circ (g \circ g)(u) = g[f(u)] = g(0) = 0$. Par suite le vecteur $g(u)$ est dans le noyau de f. D'après $(*)$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \lambda u$. D'où $g \circ g(u) = g(\lambda u) = \lambda g(u) = \lambda^2 u$. Or $g \circ g(u) = f(u) = 0$, d'où $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$. Finalement $g(u) = \lambda u = 0u = 0$, ce qui prouve la première colonne de la matrice N.

   De $f(v) = v$, on tire de même que $f[g(v)] = g(v)$. Par suite le vecteur v est dans le noyau de $f - \mathrm{id}_E$. D'après $(**)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(v)$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(v) = \lambda v$. En notant x ce réel λ, on a prouvé la deuxième colonne de la matrice N.

   La troisième colonne de la matrice N ne réclame aucune preuve.

3. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & sy \\ 0 & x^2 & xt + yt \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix}$. D'où $N^2 = B \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ (x + y)t = 4 \\ sy = -3 \end{cases} \iff (x, y, s, t) \in \{(1, 1, 2, -3); (-1, -1, -2, 3)\}$.

   Enfin $M^2 = A \iff g \circ g = f \iff N^2 = B$ en changeant de base. Or $N = P^{-1} M P$ d'après les formules de passage, en notant $P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ la matrice de passage de la vieille base (e_1, e_2, e_3) vers la nouvelle base (u, v, w). Son inverse est $P^{-1} = / \cdots / = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$M^2 = A \iff M = \pm P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \pm / \cdots / .$$