Exercice 1 - Supplémentaire stable de l'image (⋆⋆)

Soient E un K-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ admet un supplémentaire dans E stable par f si et seulement si :

$$\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$$

Et que dans ces conditions, $\ker(f)$ est l'unique supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans E, stable par f.

> Supposons que $\mathrm{Im}(f)$ admette un supplémentaire S dans E stable par f. Montrons qu'alors $S = \ker(f)$, et par conséquent $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$. Soit $x \in S$, d'une part $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, et d'autre part, puisque S est stable par f on a $f(x) \in S$. Comme $\mathrm{Im}(f) \cap S = \{0\}$ on en déduit que $f(x) = 0$ et donc $x \in \ker(f)$. Ainsi $S \subset \ker(f)$. De plus $E = \mathrm{Im}(f) \bigoplus S$ on a en utilisant le théorème du rang :
>
> $$\dim(S) = \dim(E) - \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \ker(f)$$
>
> Or $S \subset \ker(f)$ et d'après ce qui précède leur dimensions sont égales. on en déduit que $S = \ker(f)$. Ainsi, si $\mathrm{Im}(f)$ admet un supplémentaire stable par f, alors $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$, et comme le raisonnement précédent est valable pour tout supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans E stable par f, on en conclut que dans ces conditions, $\ker(f)$ est l'unique supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans E stable par f.
> Réciproquement, si $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$, alors en utilisant le théorème du rang, $\ker(f)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans E, et $\ker(f)$ est stable par f.

Exercice 2 - Construction d'une application (⋆⋆)

Soient E, F deux K-ev de dimensions finies, A un sev de E et B un sev de F montrer que les deux propriété suivantes sont équivalents :

1. $\exists f \in \mathcal{L}(E, F),\ A = \ker(f)$ et $B = \mathrm{Im}(f)$
2. $\dim(A) + \dim(B) = \dim(E)$

> Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $A = \ker(f)$ et $B = \mathrm{Im}(f)$, on a d'après le théorème du rang :
>
> $$\dim(A) + \dim(B) = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim(E)$$
>
> Réciproquement, Si $\dim(A) + \dim(B) = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim(E)$, le sev A de E admet au moins un supplémentaire A' dans E. Or :
>
> $$\dim(A') = \dim(E) - \dim(A) = \dim(B)$$
>
> Il existe un isomorphisme $\varphi : A' \to B$. Notons alors p le projecteur de E sur A' parallèlement à A et enfin $f = \varphi \circ p$. Comme f est composée de fonctions linéaires, elle est elle-même linéaire. de plus on a $\ker(f) = A$ et :
>
> $$\mathrm{Im}(f) = \varphi(p(E)) = \varphi(A') = B$$
>
> Ainsi f convient.

Exercice 3 - Trace et déterminant (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.

> Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a $\mathrm{tr}(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$. De plus on a :
>
> $$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A)\,A-\det(A)\,I_2 &= (a+d)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-(ad-bc)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a^2+ad-ad+bc & ab+bd\\ ac+cd & ad+d^2-ad+bc\end{pmatrix}\\ &= A^2\end{aligned}$$

2. Montrer que si $A^3=0$ alors $A^2=0$.

Tout d'abord A n'est pas inversible, car $A^3=0$ ainsi $\det A=0$. En multipliant l'égalité précédente par A on obtient donc :

$$A^3-\mathrm{tr}(A)\,A^2=0$$

Soit $\mathrm{tr}(A)\,A^2=0$ ainsi $A^2=0$ ou $\mathrm{tr}(A)=0$. Or si $\mathrm{tr}(A)=0$ d'après l'équation de la question 1. on a $A^2=0$ d'où le résultat.

3. On suppose ici que $A\neq I_2$ et $A\neq 0$. Montrer que A est la matrice d'une projection si et seulement si $\mathrm{tr}\,A=1$ et $\det A=0$.

Si A est une projection, alors $A^2=A$, d'où $A(A-I_2)=0$, il s'ensuit que A n'est pas inversible car $A\neq I_2$, et donc $\det A=0$. En reportant ceci dans l'égalité de la question 1. on en déduit $(1-\mathrm{tr}\,A)\,A=0$ et donc $\mathrm{tr}\,A=1$ car $A\neq 0$. Réciproquement si $\det A=0$ et $\mathrm{tr}\,A=1$ d'après l'équation de la question 1. on en déduit $A^2-A=0$ et donc A est la matrice d'une projection.

Exercice 4 - Somme de deux projecteurs (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=0=q\circ p$.

On remarque que l'on a $(p+q)^2=p^2+p\circ q+q\circ p+q^2=p+q+p\circ q+q\circ p$. Donc si $p\circ q=0=q\circ p$ on a bien $(p+q)^2=p+q$ et donc $p+q$ est bien un projecteur.
Réciproquement si $p+q$ est un projecteur on a $(p+q)^2=p+q$ et donc en simplifiant on trouve $p\circ q+q\circ p=0$ soit $p\circ q=-q\circ p$. En composant par p à droite, d'une part, et à gauche d'autre part on trouve :

$$\left\{\begin{array}{ccc} p\circ q & = & -p\circ q\circ p\\ p\circ q\circ p & = & -q\circ p\end{array}\right.$$

On en déduit donc $p\circ q=q\circ p$ or on sais déjà que $p\circ q=-q\circ p$ d'où $p\circ q=0=q\circ p$.

2. On considère à présent que $p+q$ est un projecteur.

2.a. Montrer que $\ker(p+q)=\ker p\cap\ker q$.

De façon immédiate $\ker p\cap\ker q\subset\ker(p+q)$, réciproquement soit $x\in\ker(p+q)$ on a donc $p(x)+q(x)=0$. En composant par p à gauche on trouve alors $p^2(x)+p\circ q(x)=0$ or p est un projecteur et de plus $p+q$ aussi, d'après ce qui précède on en déduit que $p\circ q=0$ et donc $p(x)=0$ et par le même raisonnement on trouve $q(x)=0$. Finalement on a bien $x\in\ker p\cap\ker q$ d'où l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

2.b. Montrer que $\mathrm{Im}(p+q)=\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$.

De façon immédiate on a $\mathrm{Im}(p+q)\subset\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$, réciproquement soit $x\in\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$, soit donc $y\in\mathrm{Im}\,p$

et $z \in \operatorname{Im} q$ tels que $x = p(y) + q(z)$. On remarque alors que l'on a :

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x)\\ &= p^2(y) + p \circ q(z) + q \circ p(y) + q^2(z)\\ &= p(y) + q(z)\\ &= x\end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité provenant du fait que p et q sont deux projecteurs et que d'après la question 1. comme $p+q$ est un projecteur $p \circ q = 0 = q \circ p$. Ainsi on a bien $x \in \operatorname{Im}(p+q)$ d'où l'inclusion et donc l'égalité.

Exercice 5 - Un endomorphisme (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Prouver que f est bijective et exprimé f^{-1}.

D'après la relation vérifiée par f on a :

$$f \circ \left[\frac{1}{2}(f - Id)\right] = Id = \left[\frac{1}{2}(f - Id)\right] \circ f$$

On en déduit alors que f est bijective et de plus on a $f^{-1} = \frac{1}{2}(f - Id)$.

2. Prouver que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.

La situation semble parfaitement adaptée pour utiliser le lemme des noyaux, en effet on remarque que $P(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ comme il s'agit d'un polynôme annulateur de f, on obtient par le lemme des noyaux la relation :

$$\ker(P(f)) = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$$

Finalement comme P est annulateur on en conclut que $\ker(P(f)) = E$ d'où le résultat.

Sinon on peux procéder par analyse/synthèse :
Pour $x \in E$ on suppose que $x = a + b$ avec $a \in \ker(f + Id)$ et $b \in \ker(f - 2Id)$, on a alors :

$$f(a) = -a \qquad f(b) = 2b$$

Dès lors par linéarité de f on trouve $f(x) = -a + 2b$, ce qui nous amène à poser $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.
Réciproquement, pour $x \in E$ on pose $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$. On a bien $x = a + b$ et de plus :

$$\begin{aligned}(f + Id)(a) &= \frac{1}{3}\Big[2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)\Big]\\ &= \frac{-1}{3}\left(f^2(x) - f(x) - x\right)\\ &= \frac{-1}{3}\left(f^2 - f + Id\right)(x) = 0\end{aligned}$$

De même on montre que $(f - 2Id)(b) = 0$ on en conclut alors la somme directe demandé.

3. On suppose ici que E est de dimension finie. Montrer que $\operatorname{Im}(f + Id) = \ker(f - 2Id)$.

Soit $y \in \operatorname{Im}(f + Id)$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x) + x$ dès lors on a :

$$
\begin{aligned}
(f - 2Id)(y) &= f(y) - 2y \\
&= f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x \\
&= f^2(x) - f(x) - 2x \\
&= \big(f^2 - f - 2Id\big)(x) = 0
\end{aligned}
$$

Ainsi $\mathrm{Im}(f + Id) \subset \ker(f - 2Id)$, pour conclure de l'égalité, on utilise le théorème du rang (doù le besoin de se placer en dimension finie), pour obtenir :

$$\dim \mathrm{Im}(f + Id) = \dim E - \dim \ker(f + Id) = \dim \ker(f - 2Id)$$

D'où l'égalité.

Exercice 6 - Polynôme annulateur $(\star\star)$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.

On écrit P sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$$

Des conditions sur P on déduit d'une part que $a_0 = 0$ et d'autre part que $a_1 \neq 0$. Prenons à présent $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$, soit donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on a de plus $f(y) = 0$ ce qui entraîne que pour tout $p \geq 1$ on a $f^p(y) = 0$. Enfin comme P est annulateur on a $P(f) = 0$ et donc en x on a en particulier :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} a_k f^k(x) &= \sum_{k=1}^{m} a_k f^k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m} a_{k+1} f^k(y) \\
&= a_1 y
\end{aligned}
$$

Comme $a_1 \neq 0$ on en déduit $y = 0$ et donc la somme est directe. De plus par le théorème du rang on obtient l'égalité des dimensions qui permet de conclure quant à la supplémentarité de l'image et du noyau de f, d'où le résultat.

Exercice 7 - Inversibilité d'un polynôme en u $(\star\star\star)$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit π_u son polynôme minimal. On considère alors $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P et π_u sont premiers entre eux.

Si P et π_u sont premiers entre eux on peut considérer U et V deux polnômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP + V\pi_u = 1$, en évaluant alors en u on obtient :

$$U(u)\,P(u) + V(u)\,\pi_u(u) = Id_E \Longleftrightarrow U(u)\,P(u) = Id_E$$

On en déduit alors que $P(u)$ est inversible d'inverse $U(u)$. Réciproquement on suppose que P et π_u ne sont pas premiers entre eux.

Soit donc Q un facteur commun, on peut alors écrire $\pi_u = QR$ avec $\deg(R) < \deg(\pi_u)$ en particulier on a $R(u) \neq 0$. Or on peut remarquer que π_u divise le produit PR et donc $P(u)\,R(u) = 0$.

Comme $R(u) \neq 0$ on en déduit que P n'est pas inversible, d'où le résultat et donc l'équivalence.

Exercice 8 - Opérateur Δ $(\star\star)$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ telle que $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et déterminer son image et son noyau.

De façon immédiate f est linéaire. De plus on remarque que $f\left(X^k\right) = kX^{k-1} + \cdots + 1$ en particulier $\deg(f(P)) = \deg(P) - 1$. On en déduit alors que $\ker(f) = \mathbb{R}_0\,[X]$.

D'après ce qui précède l'espace $\mathbb{R}_n\,[X]$ est stable par f, dès lors on note f_n l'endomorphisme induit, et avec ce qui précède on a $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}\,[X]$ car la famille $(f_n(X)\,, \ldots, f_n(X^n))$ est échelonnée en degré et contenue dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est donc une base. Ainsi pour $P \in \mathbb{R}[X]$ il existe n tel que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc f est subjective.

2. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = 0$.

On considère l'application suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \\ P & \mapsto & (\Delta(P)\,, P(0)) \end{array}$$

Il s'agit de façon évidente d'une application linéaire et de plus elle est injective car $P \in \ker(\varphi)$ implique $P \in \ker(\Delta)$ d'où P est constant et de plus $P(0) = 0$ d'où le résultat. Enfin par surjectivité de Δ on en déduit le résultat voulu.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

D'après la question précédente il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = X^2$ et $P(0) = 0$. On cherche donc P sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX$, il vient :

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) = X^2 &\iff a\,(X+1)^3 + b\,(X+1)^2 + x\,(X+1) - aX^3 - bX^2 - c = X^2 \\ &\iff 3aX^2 + (3a+2b)\,X + a + b + c = X^2 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} 3a & = & 1 \\ 3a+2b & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En résolvant ce système on trouve $P(X) = \frac{1}{6}X\,(X-1)\,(2X-1)$, et par suite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} P(k+1) - P(k) \\ P(n+1) \\ \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \end{aligned}$$
