Feuille de T.D. A

Arithmétique, polynômes & structures

Exercice 1. Montrer que, pour tout entier p premier supérieur ou égal à 5 :
$$24 \mid (p^2-1).$$

Exercice 2. Soient (a,b) dans $\mathbb{Z}^2$ et n dans $\mathbb{N}^*$ tel que que $\operatorname{pgcd}(a,b)=1$. Montrer que :

1. $\operatorname{pgcd}(a+b,a-b)\in\{1;2\}$;
2. $\operatorname{pgcd}(a^2+b^2,a+b)\in\{1;2\}$.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif non réduit à $\{0_A\}$, soit $x\in A$. On dit que x est *nilpotent* si
$$\exists n\in\mathbb{N},\ x^n=0_A.$$

Montrer que :

1. si x est nilpotent, alors x n'est pas inversible mais 1_A-x est inversible.
2. l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A.

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif. Si I est un idéal de A, alors on note
$$\sqrt{I}=\{x\in A\mid \exists n\in\mathbb{N}^*, x^n\in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $I\subset\sqrt{I}$.
2. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que :
   (a) $I\cap J$ est un idéal de A ;
   (b) $I\subset J \implies \sqrt{I}\subset\sqrt{J}$;
   (c) $\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$.
3. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}}=\sqrt{I}$.

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul.

1. Ecrire le cycle $(1,2,3,4)$ comme la composée de transpositions de la forme $(1,i)$, où $i\in[\![1,4]\!]$. Votre solution est-elle unique ?
2. Soient x et y deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Soit la permutation $f=(1,x)\circ(1,y)\circ(1,x)$. Calculer $f(z)$ pour chaque $z\in[\![1,n]\!]$.
3. Montrer que toute permutation de $[\![1,n]\!]$ est la composée de transpositions de la forme $(1,i)$, où $i\in[\![1,n]\!]$.

Exercice 6. Soit $n\geq 2$ et le cycle $c=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\end{pmatrix}$. Déterminer toutes les permutations σ de S_n telles que $\sigma\circ c=c\circ\sigma$.

Exercice 7. Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, écrire le polynôme :
$$P_n=1-X+\frac{X(X-1)}{2}-\frac{X(X-1)(X-2)}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$$
sous la forme d'un produit de n facteurs du premier degré.

Exercice 8. On note $\Gamma=\{0,1\}$, $\Gamma[X]$ l'ensemble des polynômes dont les coefficients appartient à Γ et $\Gamma_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\Gamma[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à n.

1. Quel est le cardinal de $\Gamma_n[X]$?
2. Montrer que, pour tout $P\in\Gamma_{2p}[X]$,
$$-2\frac{4^p-1}{3}\leq P(-2)\leq\frac{4^{p+1}-1}{3}.$$
3. Soient $P,\ Q\in\Gamma[X]$ tels que $P(-2)=Q(-2)$. Montrer que $P=Q$.
4. Montrer que, pour tout $N\in\mathbb{Z}$, il existe $P\in\Gamma[X]$ tel que $N=P(-2)$.