

D.S. N° 2 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

12 EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note f_k et g_k les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{C} définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) \quad \text{et} \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}.$$

On note V_n le \mathbb{C} -espace vectoriel défini par :

$$V_n = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k, (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

- 3 1. Montrer que la famille (f_0, \dots, f_n) est une base de V_n . *0,5 généré*
 2 2. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer que $f'_k \in V_n$. Justifier que l'endomorphisme *0,5 libre*

$$\begin{aligned} \varphi_n : V_n &\rightarrow V_n \\ f &\mapsto \varphi_n(f) = f' \end{aligned}$$

1 est bien défini et écrire sa matrice dans la base (f_0, f_1, \dots, f_n) de V_n . *0,5*

- 2 3. Montrer que la famille (g_0, \dots, g_n) est libre.
 1 4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = (\cos(x) + i \sin(x))^k (\cos(x) - i \sin(x))^{n-k}$. Et que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g_k \in V_n$.
 2 5. En déduire que la matrice

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

- 2 6. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il bijectif?

20

EXERCICE 2

0,1 1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{k!}$ converge.

On notera désormais $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ et, pour tout réel x , on notera $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x .

2,1 2. Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$.

3 3. En déduire que $e \notin \mathbb{Q}$. (On pourra raisonner par l'absurde en encadrant $n!e$.)

3 4. Montrer que, si une suite d'entiers converge, alors elle est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

1 5. Soit un réel a . On suppose que la suite des réels $n\{n!a\}$ converge vers un réel L . Montrer qu'il existe une suite d'entiers naturels K_n tels que $n!a = K_n + \frac{L}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.3 6. En déduire que $K_n - nK_{n-1}$ tend vers L .2 7. Montrer que $L \in \mathbb{N}$ et que, à partir d'un certain rang N , $\frac{K_n}{n!} - \frac{K_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{L}{n!}$.5 8. En calculant $\frac{K_n}{n!} - \frac{K_N}{N!}$ pour $n > N$, montrer que $a \in \mathbb{Q} + e\mathbb{N}$.

28

PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

- On note $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel de dimension n , formé des matrices colonnes à n lignes.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on notera $\text{Ker}(A)$ le noyau de A vu comme endomorphisme de \mathcal{E}_n . La matrice A^T désignera la transposée de A et on dira que A est symétrique lorsque $A^T = A$.
- Dans \mathcal{E}_n , on utilisera le produit scalaire canonique défini par

$$\forall U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_n, \quad \forall V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_n, \quad (U|V) = U^T V = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

- Dans \mathcal{M}_n , on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté \det .
- $\mathcal{G}_n = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n, \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de \mathcal{M}_n .
- On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que si $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n$ on a alors dans \mathcal{M}_{2n} :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(A) \det(D)$$

6 Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de \mathcal{M}_{2n} définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

On note

$$\mathcal{S}p_{2n} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}, M^T J M = J\}$$

- 0,5 1. Calculer J^2 et J^T en fonction de I_{2n} et J . Montrer que J est inversible et identifier son inverse.
0,5 2. Vérifier que $J \in \mathcal{S}p_{2n}$ et que pour tout réel α ,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}p_{2n}$$

- 0,5 3. Pour tout $U \in \mathcal{G}_n$, vérifier que la matrice L_U définie par $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}p_{2n}$.
1,5 4. Si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$. ± 1 car $\det J \neq 0$.
0,5 5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}p_{2n}$ est un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$.
1 6. Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{S}p_{2n}$.
1 7. Montrer que si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$ alors $M^T \in \mathcal{S}p_{2n}$.

Soit M une matrice de \mathcal{M}_{2n} écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

- 0,5 8. Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{S}p_{2n}$.

6 Centre de $\mathcal{S}p_{2n}$

On s'intéresse ici au centre \mathcal{Z} de $\mathcal{S}p_{2n}$ c'est à dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{S}p_{2n}, \forall N \in \mathcal{S}p_{2n}, MN = NM\}$$

- 0,5 9. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

- 1 10. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, montrer que $B = C = 0_n$ et $D = A$, et que A est inversible.
0,5 11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.
4 12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$. Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A , où $(E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de \mathcal{M}_n .

$\sum a_{ij} E_{i,j}$ inversible $a_{ii} = a_{jj} = 1$ $a_{ij} = 0$ $a_{ji} = \pm 1$

16 Déterminant d'une matrice symplectique

- 0,5 13. Dans cette question seulement, on suppose $n = 1$. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_2$ appartient à \mathcal{Sp}_2 si, et seulement si, son déterminant est égal à 1.

Soit M dans \mathcal{Sp}_{2n} que l'on décompose sous forme de blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1)$$

avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 14 et 15 que D est inversible.

- 2 14. Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de \mathcal{M}_n telles que

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

- 3 15. En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det(A^T D - C^T B) = 1 \quad 2$$

Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n$ telles que $P^T Q$ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans \mathcal{E}_n tels que

$$(Q - s_1 P)V_1 = (Q - s_2 P)V_2 = 0$$

- 2 16. Montrer que le produit scalaire $(QV_1 | QV_2)$ est nul.

On suppose dorénavant D non inversible.

- 1 17. Montrer que $\text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D) = \{0\}$.

Soit m un entier, $m \leq n$. Soient s_1, \dots, s_m des réels non nuls et deux à deux distincts et V_1, \dots, V_m des vecteurs non nuls tels que

$$(D - s_i B)V_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m$$

On rappelle qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

- 2 18. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est libre. 1

- 2 19. En déduire qu'il existe un réel α tel que la matrice $D - \alpha B$ est inversible.

- 3,5 20. Montrer alors que toute matrice de \mathcal{Sp}_{2n} est de déterminant égal à 1.