# COLLE N$^{\text{O}}$ 04

*Algèbre linéaire & intégrales*

**Exercice 1.**

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}_n$ des matrices antisymétriques et celui $\mathscr{S}_n$ des matrices symétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Quelles sont leurs dimensions ?
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique $A$, une unique matrice symétrique $S$ et un unique réel $c \in \mathbb{R}$ tels que
$$M = A + S + cI_n \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(S) = 0.$$
3. En déduire la décomposition de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en la somme directe de trois sous-espaces vectoriels.

**Exercice 2.**

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx$ converge.
2. Montrer que
$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}.$$
3. Par le changement de variables $u = \tan\theta$, déterminer la valeur de $I$.

**Exercice 3.** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$.

1. Montrer que le réel $F(x)$ est défini pour tout $x \geq 0$.
2. Quel est le sens de variation de la fonction $F$ sur $[0, +\infty[$ ?
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1}$ converge et la calculer.
4. À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer $F(0)$.
5. À l'aide du changement de variable $t = xu$, étudier la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.