Colle 04 Intégrales généralises

OLLIVIER Louise

Exercice 1.

1. Soit f une fonction réelle uniformément continue sur $I = [a, +\infty[$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
2. En déduire en particulier que si f est dérivable sur $[a, +\infty[$ de dérivée bornée et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f = 0$.
3. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ et f' est bornée sur $[a, b[$, alors f admet une limite finie en b.

Exercice 2.

1. Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \sin(t)}{1+t^4} dt$.
2. Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^3 \sin(t)}{1+t^4} dt$
3. Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{t^3 \sin(t)}{1+t^4} dt$.

Solution **1.**

1. *Procédons par l'absurde, si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall n \geq a,\ \exists x_n \geq n,\ |f(x_n)| \geq \varepsilon$$

   Si on suppose de plus f uniformément continue, alors il existe η tel que

$$\forall x, y \in I,\ |x-y| \leq \eta,\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$$

   dont on déduit que sur $\forall t \in [x_n, x_n+\eta]$, $|f(t)| \geq \varepsilon/2$ et donc $\left|\int_{x_n}^{x_n+\eta} f(t)\,dt\right| \geq \eta \times \varepsilon/2$, ce qui contredit la convergence de l'intégrale.

2. *L'inégalité des accroissements finis montre que f est alors lipschitzienne et donc uniformément continue.*

3. *Comme $\int_{[a,b[} |f'|$ existe, on a $\lim_{x\to b} \int_a^b f'(t)\,dt$ existe et donc f admet une limite finie en b.*

Solution **2.**

1. *On effectue une intégration par parties en intégrant la fonction* sin *après avoir remarqué que $\lim_{t\to+\infty} -\frac{t^3\cos t(t)}{1+t^4} = 0$ comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \sin(t)}{1+t^4} dt = \left[-\frac{t^3\cos t(t)}{1+t^4}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{3t^2(1+t^4) - 4t^6}{(1+t^4)^2} \cos t\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{3t^2 - t^6}{(1+t^4)^2} \cos t\, dt$$

   L'intégrande de la seconde intégrale est un $0\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, donc l'intégrale existe. D'où l'existence de l'intégrale initiale.

2. *Les calculs de la première question montrent que $f : t \mapsto \frac{t^3}{1+t^4}$ est décroissante si $t^4 > 3$.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, on a

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$$

   On multiplie par $|sint| = (-1)^n \sin t$:

$$(-1)^n f(n+1)\sin(t) \leq (-1)^n f(t)\sin(t) \leq (-1)^n f(n)\sin(t)$$

   et on intègre sur $[n\pi, (n+1)\pi]$

$$2f(n+1) \leq (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4} dt \leq 2f(n).\ (*)$$

   On a $f(n) \sim f(n+1)$ d'où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4} dt \sim (-1)^n \frac{1}{n}$.

3. *Notons $R_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(t)\sin(t)\,dt$. On remarque que R_n s'écrit comme la limite de la série alternée de terme général u_n qui est en valeur absolue décroissante d'après $(*)$ et tend vers 0. De plus $u_{2n} + u_{2n+1}$ est une série à termes positifs qui est équivalent à $\frac{a}{n^2}$. Le théorème d'intégration des équivalents nous dit que $R_{2n} \sim \frac{a}{n}$, puis $R_n \sim (-1)^n \frac{a}{n}$.*

BROUILLET Tom

Exercice 3. Étudier la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$$

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante. Soit $\alpha > -1$.
On suppose que la fonction $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. Montrer que les fonctions $t \mapsto t^\alpha f(t)$ et $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$
2. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\, dt = -(\alpha + 1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt.$$

Solution **3.** *On écrit*

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}\right)\\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right)\\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin^2 x}{x}+O(x^{-3/2}).\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ *converge, et il en est de même de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} O(x^{-3/2})dx$.
L'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx$ *est donc de même nature que* $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$. *Mais, en écrivant que*

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

puis en utilisant (toujours par une intégration par parties) que $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}$ *est convergente, et que* $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ *est divergente, on prouve que* $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ *est divergente. Il en est de même de l'intégrale de départ. Remarquons que*

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\sim_{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

et que pourtant les deux intégrales ont des comportements opposés.

Solution **4.**

1. *La fonction f étant décroissante, elle admet une limite en $+\infty$ finie ou valant $-\infty$. Si la limite est non nulle. Alors $t^\alpha =_{+\infty} O(t^\alpha f)$ ce qui contredit $t^\alpha f$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Et par décroissance, f est positive.*

$$\int_x^{2x} t^\alpha f(t)\,dt \geq f(2x)\int_x^{2x} t^\alpha\,dt \geq (2x-x)\times f(2x)\times\max(x^\alpha,(2x)^\alpha)\geq 0,$$

   le max *apparaissant car α peut être négatif. Mais dans les deux cas on trouve que $x^{\alpha+1}f(2x)$ tend vers 0 car l'intégrale de gauche tend vers 0, puisque $t^\alpha f$ est supposée intégrable.*
   On a montré que $\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha+1}f(t)=0$.

2. *On fait une intégration par parties en dérivant f :*

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\,dt=\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\times f(t)\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1}\times f'(t)\,dt$$

   en remarquant que les limites dans le crochet sont nulles d'après ce qui précède. On ne déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1}f'(t)\,dt$ converge. Mais comme f' est suppposée négative, $t^{\alpha+1}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

HOUEL Cyprien

Exercice 5.

1. Justifier l'existence de
$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$
2. Etablir
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
3. En séparant cette dernière intégrale en deux, observer
$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
puis donner la valeur de I.

Exercice 6. Nature des intégrales

$$1/ \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^{\frac{5}{2}}}\,dt, \quad 2/ \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt, \quad 3/ \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}$$

Solution **5.** *1. L'application* $t \mapsto \dfrac{1-t}{\ln t}$ *se prolonge par continuité en* 0 *par* $0 \mapsto 0$ *et en* 1 *par* $1 \mapsto 1$ *puisque* $\ln t \sim_1 t-1$ *.*

2. *L'application* $]0,1] \to [0,+\infty[$, $t \mapsto -\ln t$ *est* $\mathcal{C}^1$ *bijective et le changement de variables* $x = -\ln t$ *donne le résultat.*
3. *On écrit*

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx$$

et le résultat arrive sans problème.
Puis

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{x}\, dx \leq \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\, dx \leq \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{x}\, dx$$

et en passant à la limite, $I = \ln 2$.

Solution **6.**

1. *la fonction est continue sur* $]0,1]$ *et est équivalente à* $t^{-1/2}$ *en* 0.
2. *Il faut étudier aux deux bornes : en* 0

$$f\left(\frac{2}{\pi}+t\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}.\frac{1}{1+t\pi/2}\right)\right) =_0 \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}.(1-t\pi/2+o(t)\right)\right) \sim_0 \ln\left(\sin\left(t\pi^2/4+o(t)\right)\right) \sim_0 \ln t$$

l'intégrale est convergente. En $+\infty$*, on peut calculer*

$$\ln\left(1+\left[\cos\frac{1}{t}-1\right]\right) \sim_{+\infty} \cos\frac{1}{t}-1 \sim_{+\infty} -\frac{1}{2t^2}.$$

Ceci montre que l'intégrale sur $[1,+\infty[$ *est convergente et donc elle converge sur* $]\frac{2}{\pi};+\infty[$.

3. *On étudie les deux bornes : en* $+\infty$, $\dfrac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}\ln t}$ *et l'intégrale est convergente sur* $[1,+\infty[$ *(intégrales de Bertrand).*
En 0*, on ne peut pas utiliser les équivalents car la fonction n'est pas de signe constant !. Mais*

$$\left|\frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\right| \leq \left|\frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)}\right| \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et l'intégrale est absolument convergente sur $]0,1]$.
En conclusion, l'intégrale est convergente.

Exercice 7. 1. Justifier l'existence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} \, \mathrm{d}t$$

Pour $x > 0$, on pose

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} \, \mathrm{d}t$$

2. On rappelle $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$. Etablir que

$$I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} \, \mathrm{d}t$$

3. En déduire la valeur de I.

Solution **7.**

1. *La fonction est prolongeable par continuité en* 0 *et en* $+\infty$ *est intégrable car majorée en valeur absolue par* $\frac{1}{t^2}$ *intégrable sur* $[1, +\infty[$.
2. *Linérité de l'intégration et changement de variables donnent le résultat.*
3. *On écrit*
$$\frac{\sin t}{t^2} = \frac{1}{t} + O(t)$$
et en intégrant, on obtient $I = \frac{3}{4} \ln 3$.